

II ZESTAW ZADAŃ Z RRZ. 11 marca 2004

Wprawka 1. Narysuj metodą izoklin portret fazowy układu:

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y(x^2 - 1)(y^2 - 4) \\ \dot{y} = -x(x^2 - 1)(y^2 - 4) \end{cases} \quad (1)$$

i wykaż, że trajektorie zawierają się w elipsach, ale się nie pokrywają z nimi.

Wprawka 2. Rozwiąż równania:

$$xy' = 2y + 2x^4 \quad xy' - y = x \tan \frac{y}{x} \quad (2)$$

Zadanie 1. (*) Dany jest układ:

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 \\ \dot{y} = y^2 + x \end{cases} \quad (3)$$

- (a) Wykaż, że żadne rozwiązanie (3) nie przedłuża się dla $t \rightarrow \infty$. Wykaż, że jeśli warunek początkowy leży w drugiej ćwiartce ($x_0 < 0, y_0 > 0$), to rozwiązanie przedłuża się dla $t \rightarrow -\infty$.

Wskazówka. Jeśli $z' = h_1(x, z)$ oraz $y' = h_2(x, z)$, przy czym $h_1 \leq h_2$ oraz $z(x_0) \leq y(x_0)$, to dla wszystkich $x \geq x_0$ zachodzi $z(x) \leq y(x)$.

- (b) Narysuj zbiór punktów przegięcia rozwiązań (3). Zaznacz na \mathbb{R}^2 obszary, w których rozwiązania te są wypukłe i wklęsłe.

- (c) Wykaż, że jeśli rozwiązanie przedłuża się dla $t \rightarrow -\infty$, to zbiega asymptotycznie przy $t \rightarrow -\infty$ do górnej gałęzi krzywej $y^2 + x = 0$.

- ** (d)** Znajdź najlepsze oszacowanie dla szybkości zbiegania. Punkty dostaje tylko ta osoba, która poda najlepsze poprawne oszacowanie.

Zadanie 2. Dana jest liczba $n \in \mathbb{N}$. Rozpatrujemy rodzinę krzywych $\mathcal{C} \stackrel{\text{def}}{=} \{y = ax^n \mid a \in \mathbb{R}\}$. Znajdź rodzinę krzywych prostopadłych do \mathcal{C} w każdym punkcie \mathbb{R}^2

Zadanie 3. „Słupki” Rozwiąż równania:

$$(y' + 1) \ln \frac{y+x}{x+3} = \frac{y+x}{x+3} \quad (4)$$

$$y' = y^2 - \frac{2}{x^2} \quad (5)$$

$$xy^2 y' = x^2 + y^3 \quad (6)$$

Zadanie 4. Znajdź rozwiązanie okresowe równania:

$$y' = 2y \cos^2 x - \sin x \quad (7)$$

ROZWIĄZANIA PROSZĘ ODDAWAĆ DO 31 MARCA WŁĄCZNIE. MACIEJ BORODZIK