Pierwszy zestaw zadań z równań różniczkowych zwyczajnych

wersja z 9 marca 2007

Maciej Borodzik

Termin oddania: 23 marca 2007, godzina 12:00.

Zadania można oddawać elektronicznie (pdf), lub na kartkach.

Zadanie 1. Znajdź taką funkcję $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, że równanie

$$\begin{aligned} y' &= h(y) \\ y(0) &= y_0 \end{aligned} \tag{1}$$

Nie ma rozwiązań, nawet lokalnych dla <u>żadnego</u> $y_0 \in \mathbb{R}$.

Zadanie 2. Znajdź taką funkcję $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ciągłą, że istnieje taka funkcja $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, że $y(x) = -1$ dla $x < -1$ i $y(x) = 1$ dla $x > 1$ spełnie równanie $y' = h(y)$.

Zadanie 3. Rozpatrzmy równanie

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y + x\sin(\sqrt{x^2+y^2}) \\ \dot{y} &= -x + y\sin(\sqrt{x^2+y^2}) \end{aligned} \tag{2}$$

(a) Narysuj portret fazowy równania (2)

(b) Dla $r > 0$ rozpatrujemy równanie (2) z warunkiem początkowym $x(0) = r$, $y(0) = 0$. Wykaż, że wtedy $y(2\pi) = 0$ oraz $x(2\pi) = P(r) > 0$.

(c) Dla $r = k\pi$ oblicz $P(r)$ oraz $\frac{d}{dr}P(r)$. Wyjaśnij, o czym mówi znak $\frac{d}{dr}P(r)$ w tych punktach?

Zadanie 4. Dla jakich y_0 równanie

$$\begin{aligned} y' &= y^2 e^{-x^2} \\ y(0) &= y_0 \end{aligned}$$

ma rozwiązanie określone na całej prostej (tj. nie ma ucieczki do ∞ w skończonym czasie)?

Zadanie 5. Niech $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ciągła. Wykaż, że układ (1) ma rozwiązanie dla dowolnego y_0. Ponadto, jeśli $h(y_0) \neq 0$, rozwiązanie to jest lokalnie jednoznaczne.