

## 1. PRZYKŁADOWE PYTANIA TEORETYCZNE

**Zadanie 1.1.** Sformułować i podać dowód twierdzenia Picarda-Linela o istnieniu i jednoznaczności rozwiązań równania różniczkowego

**Zadanie 1.2.** Uzasadnić że zbiór rozwiązań równania liniowego jednorodnego w  $R^m$  jest przestrzenią liniową wymiaru  $m$ . Podać definicję macierzy fundamentalnej układu równań liniowych.

**Zadanie 1.3.** Naszkicować wszystkie możliwe portrety fazowe dla układu dwóch równań liniowych jednorodnych (czyli równania liniowego jednorodnego w  $R^2$ ) o stałych współczynnikach (w zależności od wartości własnych macierzy układu). Wyróżnić te portrety dla których każda trajektoria jest ograniczona.

**Zadanie 1.4.** Sformułować twierdzenie o różniczkowalnej zależności rozwiązania równania od warunku początkowego i od parametru. Podać odpowiednie wzory.

**Zadanie 1.5.** Podać sformułowanie i dowód nierówności Gronwalla.

**Zadanie 1.6.** Sformułować i udowodnić twierdzenie Liouville'a dla równań liniowych w  $R^m$ .

## 2. PRZYKŁADOWE ZADANIA (NIECO) TEORETYCZNE

**Zadanie 2.1.** Uzasadnić że jeśli  $f : R^m \rightarrow R^m$  jest funkcją klasy  $C^1$ , ograniczoną, to każde rozwiązanie  $x(t)$  równania  $x' = f(x)$  można przedłużyć do rozwiązania określonego na całej prostej.

**Zadanie 2.2.** Ustalmy  $x_0 \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  Wykazać że zagadnienie początkowe

$$y' = \tan x \cdot \sin |xy|, \quad y(x_0) = y_0$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie i że to rozwiązanie przedłuża się na cały przedział  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ .

**Zadanie 2.3.** Sprawdzić że równanie  $y' = x^2 - y^2$  z warunkiem początkowym  $y(0) = 0$  spełnia założenia twierdzenia Picarda-Lindelofa. Napisać trzy pierwsze wyrazów ciągu kolejnych przybliżeń rozwiązania (jak w dowodzie Twierdzenia).

**Zadanie 2.4.** Czy równanie  $y' = \sqrt{|\sin y|}$  spełnia założenia twierdzenia Picarda-Lindelofa? Definiujemy funkcję  $H(y) = \int_0^y \frac{du}{\sqrt{|\sin u|}}$  Sprawdzić że obie funkcje  $y_1(x) = 0$ ,  $y_2(x) = H^{-1}(x)$  ( $H^{-1}(x)$  to funkcja odwrotna) są rozwiązaniami naszego równania z warunkiem początkowym  $y(0) = 0$  w otoczeniu punktu  $x = 0$ .

**Zadanie 2.5.** Rozważmy układ równań w  $R^2$ :

$$\begin{aligned}x' &= y + x^3 - y^2 \\y' &= -x - x^4 y^7\end{aligned}$$

Niech  $x(t, x_0, y_0), y(t, x_0, y_0)$  będzie rozwiązaniem układu z warunkiem początkowym  $x(0) = x_0, y(0) = y_0$ . Wyznaczyć pochodną  $\frac{\partial x(t, x_0, y_0)}{\partial y_0}$  w punkcie  $x_0 = y_0 = 0$ .

**Zadanie 2.6.** Dla równania

$$x' = 2t + \mu x^2, x(0) = \mu - 1$$

policzyć  $\frac{\partial x}{\partial \mu}|_{\mu=0}$ .

### 3. PRZYKŁADOWE ZADANIA RACHUNKOWE

**Zadanie 3.1.** Rozwiązać równania (niekiedy z podanym warunkiem początkowym  $(x_0, y_0)$ ). Jak widać, są to równania liniowe, albo jednorodne, albo Bernoulliego, albo w postaci różniczki zupełnej). Wiele podobnych zadań jest dostępnym w każdym zbiorze, np Matwiejewa.

$$y' = \frac{y}{x} + x \cos x$$

$$2y' = \frac{xy}{x^2 - 1} + \frac{x}{y}$$

$$(x + 4y)y' = 2x + 3y - 5$$

$$y' + 2y = y^2 e^x$$

$$\left(\frac{x}{y} + 1\right)dx + \left(\frac{x}{y} - 1\right)dy = 0, \quad x_0 = y_0 = 1$$

(wsk znaleźć czynnik całkujący)

$$ydx + \left(\frac{e^x}{y} - 1\right)dy = 0, \quad x_0 = 0, y_0 = -1$$

**Zadanie 3.2.** Rozwiązać następujące równania liniowe jednorodne o stałych współczynnikach (ew. z podanym warunkiem początkowym). (w każdym podręczniku/zbiorze zadań jest pod dostatkim takich przykładów) Warto odpowiadać przy okazji na pytanie: Czy rozwiązanie (rozwiązania) jest ograniczone przy  $t \rightarrow \pm\infty$ ?

**Zadanie 3.3.** Rozwiązać układ równań metodą uzmienniania stałej:

$$x' = x - y + \frac{1}{\cos t}$$

$$y' = 2x - y$$

**Zadanie 3.4.** Rozwiązać równania liniowe wyższych rzędów o stałych współczynnikach:

$$y'' + 3y' - 4y = e^{-4x} + xe^{-x}$$

$$y^{IV} + 2y'' + y = 0$$

$$y'' - 5y' = 3x^2 + \sin 5x$$

(i wiele innych, dostępnych w każdym zbiorze zadań)

**Zadanie 3.5.** Rozwiązać następujące równanie liniowe metodą uzmienniania stałej:

$$y'' + y = \frac{1}{\sin x}$$

**Zadanie 3.6.** Dla podanych układów równań wyznaczyć punkty osobliwe (stacjonarne) i - korzystając z odpowiedniego twierdzenia- rozstrzygnąć czy są one stabilne w sensie Lapunowa.

$$\begin{aligned}x' &= y - x^2 - x \\y' &= 3x - x^2 - y\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x' &= (x - 1)(y - 1) \\y' &= xy - 2\end{aligned}$$

**Zadanie 3.7.** Rozstrzygnąć czy rozwiązanie "zerowe" ( $x(t) = 0, y(t) = 0$ ) jest stabilne (asymptotycznie stabilne) w sensie Lapunowa:

$$\begin{aligned}x' &= y - x + xy \\y' &= x - y - x^2 - y^3\end{aligned}$$

(wsk: zbadać zachowanie wzdłuż trajektorii (czyli  $\frac{d}{dt}V(x(t), y(t))$  dla funkcji  $V(x, y) = x^2 + y^2$ )

**Zadanie 3.8.** Znaleźć rozwiązanie równania

$$y' \sin 2x = 2(y + \cos x)$$

które jest określone w przedziale  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  i które pozostaje ograniczone przy  $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$ .

**Zadanie 3.9.** Znaleźć okresowe rozwiązanie równania

$$y' = y \cos^2 x + \sin x$$

**Zadanie 3.10.** Znaleźć wszystkie funkcje ciągłe  $y = \phi(x)$  określone w  $R$  takie że

$$\phi(x) = \int_0^x \phi(t) dt + x + 1$$

Wsk: Funkcja  $y(x) = \int_0^x \phi(t) dt$  spełnia pewne (jakie?) równanie różniczkowe z pewnym warunkiem początkowym.