1. Przykładowe pytania teoretyczne

Zadanie 1.1. *Sformułować i podać dowów twierdzenia Picarda-Linelofa o istnieniu i jednoznaczności rozwiązań równania różniczkowego*

Zadanie 1.2. *Uzasadnić że zbiór roziwązań równania liniowego jednorodnego w R^m jest przestrzenią liniową wymiaru m. Podać definicję macierzy fundamentalnej układu równań liniowych.*

Zadanie 1.3. *Naszkicować wszystkie możliwe portrety fazowe dla układu dwóch równań liniowych jednorodnych (czyli równania liniowego jednorodnego w R^2) o stałych współczynnikach (w zależności od wartości własnych macierzy układu). Wyróżnić te portrety dla których każda trajektoria jest ograniczona.*

Zadanie 1.4. *Sformułować twierdzenie o różniczkowalnej zależności rozwiązania równania od warunku początkowego i od parametru. Podać odpowiednie wzory.*

Zadanie 1.5. *Podać sformułowanie i dowód nierówności Gronwalla.*

Zadanie 1.6. *Sformułować i udowodnić twierdzenie Liouville'a dla równań liniowych w R^m.*

2. Przykładowe zadania (nieco) teoretyczne

Zadanie 2.1. *Uzasadnić że jeśli $f : R^m \to R^m$ jest funkcją klasy C^1, ograniczoną, to każde rozwiązanie $x(t)$ równania $x' = f(x)$ można przedłużyć do rozwiązania określonego na całej prostej.*

Zadanie 2.2. *Ustalmy $x_0 \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ Wykazać że zagadnienie początkowe*

$$y' = \tan x \cdot \sin |xy|,\ \ y(x_0) = y_0$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie i że to rozwiązanie przedłuża się na cały przedział $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Zadanie 2.3. *Sprawdzić że równanie $y' = x^2 - y^2$ z warunkiem początkowym $y(0) = 0$ spełnia założenia twierdzenia Picarda-Lindelofa. Napisać trzy pierwsze wyrazów ciągu kolejnych przybliżeń rozwiązania (jak w dowodzie Twierdzenia).*

Zadanie 2.4. *Czy równanie $y' = \sqrt{|\sin y|}$ spełnia założenia twierdzenia Picarda-Lindelofa? Definiujemy funkcję $H(y) = \int_0^y \frac{du}{\sqrt{|\sin u|}} du$ Sprawdzić że obie funkcje $y_1(x) = 0$, $y_2(x) = H^{-1}(x)$ ($H^{-1}(x)$ to funkcja odwrotna) są rozwiązaniami naszego równania z warunkiem początkowym $y(0) = 0$ w otoczeniu punktu $x = 0$.*

Zadanie 2.5. *Rozważmy układ równań w R^2:*

$$x' = y + x^3 - y^2$$
$$y' = -x - x^4 y^7$$

Niech $x(t, x_0, y_0), y(t, x_0, y_0)$ będzie rozwiązaniem układu z warunkiem początkowym $x(0) = x_0, y(0) = y_0$. Wyznaczyć pochodną $\frac{\partial x(t,x_0,y_0)}{\partial y_0}$ w punkcie $x_0 = y_0 = 0$.

Zadanie 2.6. *Dla równania*

$$x' = 2t + \mu x^2 . x(0) = \mu - 1$$

policzyć $\frac{\partial x}{\partial \mu}_{|\mu=0}$.

3. Przykładowe zadania rachunkowe

Zadanie 3.1. *Rozwiązać równania (niekiedy z podanym warunkiem początkowym* (x_0, y_0)*). Jak widać, są to równania liniowe, albo jednorodne, albo Bernoulliego, albo w postaci różniczki zupełnej). Wiele podobnych zadań jest dostępnym w każdym zbiorze, np Matwiejewa.*

$$y' = \frac{y}{x} + x\cos x$$

$$2y' = \frac{xy}{x^2-1} + \frac{x}{y}$$

$$(x+4y)y' = 2x + 3y - 5$$

$$y' + 2y = y^2 e^x$$

$$(\frac{x}{y} + 1)dx + (\frac{x}{y} - 1)dy = 0,\ x_0 = y_0 = 1$$

(wsk znaleźć czynnik całkujący)

$$ydx + (\frac{e^x}{y} - 1)dy = 0,\ , x_0 = 0, y_0 = -1$$

Zadanie 3.2. *Rozwiązać następujcę równania liniowe jednorodne o stałych współczynnikach (ew. z podanym warunkiem początkowym). (w kazdym podreczniku/zbiorze zadań jest pod dostatkiem takch przykładów) Warto odpowiadać przy okazji na pytanie: Czy rozwiązanie (rozwiązania) jest ograniczone przy* $t \to \pm\infty$*?*

Zadanie 3.3. *Rozwiązać układ równań metodą uzmienniania stałej:*

$$x' = x - y + \frac{1}{\cos t}$$

$$y' = 2x - y$$

Zadanie 3.4. *Rozwiązać równania liniowe wyższych rzędów o stałych współczynnikach:*

$$y'' + 3y' - 4y = e^{-4x} + xe^{-x}$$

$$y^{IV} + 2y'' + y = 0$$

$$y'' - 5y' = 3x^2 + \sin 5x$$

(i wiele innych, dostępnych w każdym zbiorze zadań)

Zadanie 3.5. *Rozwiązać następujące równanie liniowe metodą uzmienniania stałej:*

$$y'' + y = \frac{1}{\sin x}$$

Zadanie 3.6. *Dla podanych układów równań wyznaczyć punkty osobliwe (stacjonarne) i - korzystając z odpowiedniego twierdzenia- rozstzygnąć czy są one stabilne w sensie Lapunowa.*

$$x' = y - x^2 - x$$
$$y' = 3x - x^2 - y$$

$$x' = (x-1)(y-1)$$
$$y' = xy - 2$$

Zadanie 3.7. *Rozstrzygnąć czy rozwiązanie zerowe" $(x(t) = 0, y(t) = 0)$ jest stabilne (asymptotycznie stabilne) w sensie Lapunowa:*

$$x' = y - x + xy$$
$$y' = x - y - x^2 - y^3$$

(wsk: zbadać zachowanie wzdłuż trajektorii (czyli $\frac{d}{dt}V(x(t), y(t))$ dla funkcji $V(x,y) = x^2 + y^2$)

Zadanie 3.8. *Znaleźć rozwiązanie równania*

$$y' \sin 2x = 2(y + \cos x)$$

które jest określone w przedziale $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ i które pozostaje ograniczone przy $x \to \frac{\pi}{2}$.

Zadanie 3.9. *Znaleźć okresowe rozwiązanie równania*

$$y' = y\cos^2 x + \sin x$$

Zadanie 3.10. *Znaleźć wszystkie funkcje ciągłe $y = \phi(x)$ określone w R takie że*

$$\phi(x) = \int_0^x \phi(t)dt + x + 1$$

Wsk: Funkcja $y(x) = \int_0^x \phi(t)dt$ spełnia pewne (jakie?) równanie różniczkowe z pewnym warunkiem początkowym.