Drugi zestaw zadań z Równań Różniczkowych Zwyczajnych.
Termin oddania poniedziałek, 19 maja 2008

Zadanie 1. Rozpatrzmy równanie

$$\ddot{x} = -\omega^2 \sin x.$$

z warunkiem początkowym $x(0) = A$, $\dot{x}(0) = 0$. Równanie to, poprzez przybliżenie $\sin x \sim x$ dla małych A ma rozwiązanie okresowe o okresie $P(A) \sim 2\pi\omega$. Znajdź rozwinięcie $P(A)$ w szereg Taylora w otoczeniu zera aż do wyrazu z A^3 włącznie.

Zadanie 2. Niech f ciągła. Załóżmy, że dla $t_0 \leq t < \infty$ istnieją takie dodatnie stałe a, c, że

$$|f(t)| \leq \frac{c}{t^{1+a}}.$$

Wykaż, że równanie

$$u'' + (1 + f(t))u = 0.$$

Ma liniowo niezależne rozwiązania u_1 i u_2 takie, że $u_1 = \cos t + O(t^{-a})$, $u_2 = \sin t + O(t^{-a})$. Ponadto równanie

$$u'' - (1 + f(t))u = 0.$$

Ma rozwiązania $u_1(t) = e^t(1 + O(t^{-a}))$, $u_2(t) = e^{-t}(1 + O(t^{-a}))$.

Zadanie 3. Wykaż, że każde rozwiązanie równania

$$y' = x^3 - y^3$$

przy $x \to \infty$ rośnie co najwyżej wielomianowo, to znaczy istnieje $P(x)$ takie, że $|y(x)| \leq P(x)$ dla dostatecznie dużych x.

Zadanie 4. Dla jakich wartości parametru a równanie zapisane we współrzędnych biegunowych

$$r' = (r - 1)(a + \sin^2 \phi), \quad \phi' = 1$$

ma stabilne (przyciagające) rozwiązanie okresowe, a dla jakich niestabilne?

Zadanie 5. O grupie dyfeomorfizmów.

Komentarz dla osób o mocnych nerwach. Nie trzeba go rozumieć, ani nawet czytać, aby rozwiązać to zadanie. Na poniedziałkowych ćwiczeniach pokazaliśmy (gdy piszę te słowa, to znaczy: pokażemy), że gdy M jest zwartą rozmaitością gładką, to grupa $\mathrm{Diff}(M)$ dyfeomorfizmów jest rozmaitością różniczkową modelowaną na przestrzeni Banacha pól wektorowych $Vect(M)$. Inaczej mówiąc, $\mathrm{Diff}(M)$ jest nieskończenie wymiarową grupą Liego, której algebra Liego (przestrzeń styczna w jedynce) jest $Vect(M)$.

Dla ogólnej grupy Liego G mamy odwzorowanie exp idące z jej algebry Liego do G. Gdy G jest grupą macierzową, exp jest standardowym przekształceniem „e do macierzy". Jeśli G jest zwarta, to exp jest lokalnym izomorfizmem (istnieje otoczenie zera w g i otoczenie jedynki w G takie, że exp jest dyfeomorfizmem). Poniższe zadanie pokazuje, że gdy G jest nieskończenie wymiarowa, nie jest to prawdą. W przypadku grupy $\mathrm{Diff}(M)$, odwzorowanie exp jest braniem potoku po czasie 1.

Zadania dotyczą funkcji okresowej, ale oczywiście chodzi o okrąg S^1 i jego grupę dyfeomorfizmów.

(a) Niech v będzie funkcją gładką okresową na $\mathbb{R}$ o okresie 1, nigdzie nie znikającą. Rozpatrujemy równanie
$$\frac{df}{dt} = v(f(t)).$$
z warunkiem początkowym $f(0) = x_0$. Niech $g(x_0) = f(1)$ będzie dyfeomorfizmem po czasie 1 wtedy g jest, naturalnie, okresowe. Możemy je traktować jako przekształcenie z S^1 do S^1.

Udowodnij, że w zależności od tego, czy całka $\int_0^1 \frac{1}{v(y)} dy$ jest wymierna, czy nie, albo każdy punkt z S^1 jest okresowy pod działaniem g, albo g nie ma punktów okresowych.

(b) Wykaż, że przekształcenie $x \to x + 1/n + \varepsilon \sin^2(n\pi x)$ dla n dostatecznie dużych i ε dostatecznie małym jest dyfeomorfizmem S^1, którego niektóre punkty są okresowe a inne nie. W szczególności nie może być on potokiem po czasie 1 żadnego pola v.

(c) Niech $v(x) = 1/(n + a\sin(2\pi x))$, gdzie a jest mały rzeczywisty, zaś n jest duże i całkowite. Udowodnij, że dyfeomorfizm po czasie 1 pola v jest rotacją. W szczególności nie zależy od a. To pokazuje, że dwa różne pola mogą mieć ten sam potok po czasie 1.

Maciej Borodzik