Pierwszy zestaw zadań z Równań Różniczkowych Zwyczajnych.

Termin oddania poniedziałek, 14 kwietnia 2008

Zadanie 1. Niech V będzie przestrzenią liniową z normą $||\cdot||$, zaś A przekształceniem liniowym z V do V o skończonej normie.

(a) Udowodnij, że dowolne rozwiązanie równania

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad x \in V$$

jest postaci

$$x(t) = e^{tA}x_0,$$

gdzie

$$e^{tA} : V \to V$$

zadane jest wzorem

$$e^{tA}v = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} t^n \cdot A^n v.$$

(b) Niech teraz V będzie podprzestrzenią funkcji klasy C^∞, nieskończenie wymiarową i zupełną w pewnej normie oraz taką, że przekształcenie

$$D : V \to V, D(f) = f'(x).$$

ma skończoną normę.

(c) Znajdź rozwiązanie ogólne równań

$$\frac{d}{dt} f = Df,$$
$$\frac{d}{dt} f = Df + f,$$

gdzie f traktujesz jako funkcję zmiennej t o wartościach w przestrzeni V oraz jako funkcję rzeczywistą dwóch zmiennych.

Zadanie 2. Udowodnij, że równanie $y' = y^2 + x$ ma dokładnie jedno rozwiązanie $y(x)$ takie, że

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{y(x)}{\sqrt{-x}} = -1.$$

Zadanie – konkurs 1. Oszacuj najlepiej, jak możesz, jak bardzo różni się funkcja $y(x)$ określona w Zadaniu 2 od funkcji $\sqrt{-x}$. To znaczy zbadaj zbieżność i/lub szybkość zbieżności różnicy $y(x) - \sqrt{-x}$ lub szybkość zbieżności ilorazu $y(x)/\sqrt{-x}$.

Zadanie 3. Rozważmy równanie

$$\begin{cases} y' &= h(y), \\ y(x_0) &= y_0. \end{cases}$$

gdzie $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest ciągła. Załóżmy, że wiemy że to równanie ma dwa różne rozwiązania. Wykaż, że ma ich kontinuum.

Zadanie 4. Niech a, b, c będą liczbami całkowitymi, przy czym c nie jest liczbą całkowitą ujemną. Dla dowolnego n całkowitego oznaczamy

$$x^{\overline{n}} = x(x+1)\dots(x+n-2)(x+n-1).$$

Niech teraz funkcja $F(z)$ będzie dana wzorem

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{\overline{n}} b^{\overline{n}}}{c^{\overline{n}} n!} z^n.$$

(a) Udowodnij, że F spełnia równanie różniczkowe

$$z(1-z)F''(z) + (c - z(a+b+1))F'(z) - abF(z) = 0, \tag{1}$$

ponadto jest to jedyna funkcja spełniająca (1), analityczna w zerze, taka że $F(0) = 1$.

(b) Wyjaśnij, dlaczego nie ma sprzeczności z faktem, że przestrzeń rozwiązań równania liniowego rzędu 2 jest dwuwymiarowa?

Zadanie 5. Rozważmy równanie

$$z^2 f'(z) + f(z) = z. \tag{2}$$

Zakładając, że istnieje rozwiązanie analityczne w otoczeniu zera (tzn. takie, że $f(z) = \sum a_k z^k$) znajdź rekurencyjnie współczynniki a_k i znajdź promień zbieżności szeregu.

Rozwiąż, jak Pan Bóg przykazał, równanie (2) i zbadaj zachowanie się rozwiązań przy $z \to 0$.

Maciej Borodzik