Zestaw zadań z Równań Różniczkowych. 1/3. *Każde zadanie jest za 5 punktów.*
Termin oddania: 15 maja 2008
Zadania można wręczać osobiście, przez kogoś, wkładać do skrytki, przesyłać elektronicznie, sfotografować (byle dobrze) i przesłać jpeg, (albo inny sensowny format), w ostateczności wsuwać pod drzwi pokoju 5460.

Zadanie 1. Niech $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ będzie macierzą o wartościach własnych $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, przy czym krotność i−tej wartości własnej wynosi m_i. Rozpatrzmy wielomian

$$P(\lambda) = a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n$$

oraz układ równań

$$\begin{array}{lllll} P(\lambda_1) = e^{\lambda_1} & \ldots & \frac{\partial}{\partial\lambda}P|_{\lambda=\lambda_1} = e^{\lambda_1} & \ldots & \frac{\partial^{m_1-1}}{\partial\lambda^{m_1-1}}P|_{\lambda=\lambda_1} = e^{\lambda_1} \\ \ldots & & & & \\ P(\lambda_k) = e^{\lambda_k} & \ldots & \frac{\partial}{\partial\lambda}P|_{\lambda=\lambda_k} = e^{\lambda_k} & \ldots & \frac{\partial^{m_k-1}}{\partial\lambda^{m_k-1}}P|_{\lambda=\lambda_k} = e^{\lambda_1} \end{array}$$

gdzie niewiadomymi są współczynniki wielomianu P. (Jeśli $m_i = 1$, bierzemy wyłącznie równanie $P(\lambda_i) = e^{\lambda_i}$.) Udowodnij, że zachodzi równość

$$e^A = a_1A^{n-1} + a_2A^{n-2} + \cdots + a_{n-1}A + a_nI.$$

To zadanie pozwala na efektywne obliczanie e^A, bez konieczności sprowadzania macierzy do postaci Jordana, co może się przydać na zajęciach z RRZ. Metoda ta jest tematem tabu na wydziale Matematyki.

Zadanie 2. Niech a, b, c będą liczbami całkowitymi, przy czym c nie jest liczbą całkowitą ujemną. Dla dowolnego n całkowitego oznaczamy

$$x^{\overline{n}} = x(x+1)\ldots(x+n-2)(x+n-1).$$

Niech teraz funkcja $F(z)$ będzie dana wzorem

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{\overline{n}}b^{\overline{n}}}{c^{\overline{n}}n!}z^n.$$

(a) Udowodnij, że F spełnia równanie różniczkowe

$$z(1-z)F''(z) + (c - z(a+b+1))F'(z) - abF(z) = 0, \tag{1}$$

ponadto jest to jedyna funkcja spełniająca (1), analityczna w zerze, taka że $F(0) = 1$.

(b) Wyjaśnij, dlaczego nie ma sprzeczności z faktem, że przestrzeń rozwiązań równania liniowego rzędu 2 jest dwuwymiarowa?

Zadanie 3. Rozpatrzmy równanie

$$\ddot{x} = -\omega^2 \sin x.$$

z warunkiem początkowym $x(0) = A$, $\dot{x}(0) = 0$. Równanie to, poprzez przybliżenie $\sin x \sim x$ dla małych A ma rozwiązanie okresowe o okresie $P(A) \sim 2\pi\omega$. Znajdź rozwinięcie $P(A)$ w szereg Taylora w otoczeniu zera aż do wyrazu z A^3 włącznie.

Zadanie 4. Zając (Z) w chwili $t_0 = 0$ znajduje się w punkcie $(x, y) = (0, 0)$. Widząc wilka (W) w punkcie $(-A, 0)$ zaczyna biec z prędkością stałą v_Z w kierunku pionowym. Wilk goni zająca z prędkością $v_W > v_Z$ w kierunku, w którym w danej chwili widzi zająca. Po jakim czasie wilk dogoni zająca?