Zestaw zadań z Równań Różniczkowych. 1/3. *Każde zadanie jest za 5 punktów.*
Termin oddania: 16 kwietnia 2008
Zadania można wręczać osobiście, przez kogoś, wkładać do skrytki, przesyłać elektronicznie, sfotografować (byle dobrze) i przesłać jpeg, (albo inny sensowny format), w ostateczności wsuwać pod drzwi pokoju 5460.

Zadanie 1. Rozważmy równanie

$$x^2y' + y = x.$$

Zakładając, że równanie ma rozwiązanie analityczne w zerze zapisywalne przez

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

znajdź rekurencyjne współczynniki na a_n. Zbadaj promień zbieżności otrzymanego szeregu. Wyjaśnij występujące zjawisko wypisując rozwiązanie ogólne wyjściowego równania.

Zadanie 2. Rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} \dot{x} &= x^3 - 3xy^2 \\ \dot{y} &= 3x^2y - y^3. \end{cases}$$

Zbadaj asymptotykę rozwiązań przy $t \to \pm\infty$ w zależności od warunku początkowego $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$. Naszkicuj portret fazowy.

Zadanie 3. Niech dana będzie gładka funkcja $H(p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n)$. Rozpatrujemy równanie różniczkowe zwyczajne w $\mathbb{R}^{2n}$:

$$\begin{cases} \dot{p}_1 = \dfrac{\partial H}{\partial q_1} & \ldots \quad \dot{p}_n = \dfrac{\partial H}{\partial q_n} \\ \dot{q}_1 = -\dfrac{\partial H}{\partial p_1} & \ldots \quad \dot{q}_n = -\dfrac{\partial H}{\partial p_n} \end{cases} \tag{1}$$

Wykaż, że H jest całką pierwszą układu. Ponadto $F(p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n)$ jest całką pierwszą (1) wtedy i tylko wtedy, gdy $\{H, F\} \equiv 0$, gdzie:

$$\{H, F\} \overset{def}{=} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} - \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} \right)$$

Udowodnij, że dla dowolnych funkcji F_1, F_2 i F_3 zachodzi $\{F_1, F_2\} = -\{F_2, F_1\}$, oraz:

$$\{F_1, \{F_2, F_3\}\} + \{F_2, \{F_3, F_1\}\} + \{F_3, \{F_1, F_2\}\} \equiv 0$$

i wywnioskuj, że jeśli F_1 i F_2 są całkami pierwszymi (1), to $\{F_1, F_2\}$ też.

Zadanie 4. Wykaż, że równanie $y' = x + y^2$ ma dokładnie jedno rozwiązanie zbiegające asymptotycznie do $\sqrt{-x}$ przy $x \to -\infty$, dokładnie

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{y(x)}{\sqrt{-x}} = 1.$$

Zadanie 5. Rozpatrujemy równanie

$$y' = xy^2 + 1$$

z warunkiem początkowym $y(0) = 0$. Określamy ciąg rozwiązań rekurencyjnie przez

$$\begin{cases} y_0(x) &= 0 \\ y_{n+1}(x) &= \int_0^x t y_n(t)^2 + 1 \, dt \end{cases}$$

Znajdź takie dwa przedziały (niekoniecznie najlepsze możliwe) I i J, że y_n jest zbieżny jednostajnie na I, ale nie jest zbieżny jednostajnie na J.