Rozwiązania zadań z równań różniczkowych zwyczajnych

Piotr Nayar

Zestaw I

Zadanie 1. Niech $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie zadana wzorem $h(x) = \mathrm{I}_{\mathbb{Q}} + 1$. Wówczas jeśli warunek $y(0) = y_0$ daje lokalne rozwiązanie $y(x)$ rozpatrywanego równania, to $y'(x) = h(y(x))$, więc $y'(x)$ ma najwyżej dwie wartości. Zatem musi mieć jedną wartość, bo pochodna ma własność Darboux. Ale z tego wynika, że y ma również tylko jedną wartość w rozpatrywanym otoczeniu $x_0 = 0$, bo w przeciwnym przypadku y, jako funkcja różniczkowalna (więc ciągła) przyjmowałaby pośrednie wartości wymierne i niewymierne, a to przeczy temu, że h ma tylko jedną wartość. Stąd $y' = 0$, ale z drugiej strony $y' = h(y) \geq 1$.

Zadanie 2. Rozważmy funkcję

$$h(y) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } |y| \geq 1 \\ \frac{\pi}{2}\sqrt{1-y^2} & \text{gdy } |y| < 1 \end{cases}$$

Oczywiście mamy rozwiązania stałe $h(y) \equiv 1$ i $h(y) \equiv -1$. Bezpośrednio sprawdzamy, że dla $|y| < 1$ jednym z rozwiązań jest $y(x) = \sin\frac{\pi}{2}x$. Ostatecznie następująca funkcja

$$y(x) = \begin{cases} -1 & \text{gdy } x < -1 \\ \sin\frac{\pi}{2}x & \text{gdy } |x| \leq 1 \\ 1 & \text{gdy } x > 1 \end{cases}$$

spełnia równanie $y' = h(y)$.

Zadanie 3 c) Możemy skorzystać z równania w wariacjach względem warunku początkowego. Niech $r_0(t) \equiv k\pi$ będzie rozwiązaniem stałym ze względu na r. Niech $r_\varepsilon(t) = r_0(t) + \varepsilon r_1(t) + \ldots$. Rozpatrujemy

$$\Delta r = r_\varepsilon(0) - r_0(0) = \varepsilon r_1(0) + \ldots$$

$$\Delta P = r_\varepsilon(2\pi) - r_0(2\pi) = \varepsilon r_1(2\pi) + \ldots$$

Wtenczas

$$\frac{\Delta P}{\Delta r} \to \frac{r_1(2\pi)}{r_1(0)}$$

i r_1 spełnia równanie w wariacjach, które tu przyjmuje postać

$$\frac{\mathrm{d}r_1}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\mathrm{d}r_1}{\mathrm{d}t}(r\sin r)(k\pi)\right) r_1 = r_1\, k\pi(-1)^k$$

Otrzymamy natychmiast

$$\ln \frac{r_1(2\pi)}{r_1(0)} \;=\; 2\pi \cdot k\pi(-1)^k$$

Czyli

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}r} \;=\; e^{2\pi^2 k(-1)^k}$$

Zestaw II

Zadanie 2.2. Zapisujemy rozwiązanie równania w postaci

$$y(x) = y_0(x) + \varepsilon y_1(x) + \varepsilon^2 y_2(x) + \ldots + \varepsilon^n y_n(x) + \ldots$$

Zatem w obszarze jednostajnej zbieżności tego szeregu funkcyjnego powyższe równanie sprowadza się do (*):

$$y_0'(x)+\varepsilon y_1'(x)+\ldots+\varepsilon^n y_n'(x)+\ldots = \varepsilon x+(y_0(x)+\varepsilon y_1(x)+\ldots+\varepsilon^n y_n(x)+\ldots)^3$$

Porównując wyrazy przy kolejnych potęgach ε otrzymamy

$$\begin{array}{ll} (1) & y_0' = y_0^3 \\ (2) & y_1' = 3y_0^2 y_1 + x \\ (3) & y_2' = 3y_0^2 y_2 + 3y_0 y_1^2 \\ (4) & y_3' = 3y_0^2 y_3 + 6y_0 y_1 y_2 + y_1^3 \end{array}$$

Oczywiście, biorąc pod uwagę warunek początkowy, dostajemy z (1) $y_0 \equiv 0$. Nakładając warunek $y_i(0) = 0$, co da zgodność z warunkiem $y(0) = 0$, otrzymamy z $(2), (3), (4)$

$$\begin{array}{l} y_1(x) = \frac{1}{2}x^2 \\ y_2(x) = 0 \\ y_3(x) = \int_0^x (\frac{1}{2}x'^2)^3 \,\mathrm{d}x' = \frac{1}{56}x^7 \end{array}$$

Czyli

$$y(x) = \varepsilon \frac{1}{2}x^2 + \varepsilon^3 \frac{1}{56}x^7$$

Teraz spróbujemy zapanować nad innymi wyrazami rozwinięcia. Zauważmy najpierw, że $y_{2n} \equiv 0$. Pokazujemy to przez indukcję ze względu na n. Dla $n = 0$ tezę pokazaliśmy. Jeśli teza zachodzi dla $n = 1, 3, \ldots, 2n-1$, to aby w równaniu (*) po prawej stronie otrzymać ε^{2n} musielibyśmy wybrać z trzech nawiasów po jednej mniejszej od $2n$ nieparzystej potędze ε i dodać wykładniki do siebie, otrzymując $2n$, co oczywiście możliwe nie jest, bo suma nieparzystej liczby liczb nieparzystych nie bywa liczbą parzystą. Stąd $y_{2n}' = 0$, zatem $y_{2n} = 0$.

Teraz dokonamy następującej obserwacji: w napisie $y_{2n+1}' = y_1^2 y_{2n-1} + \ldots$ mamy $\frac{1}{2}n(n+1)$ składników. Z (*) wynika, że jest ich tyle, ile jest trójek (i_1, i_2, i_3) liczb naturalnych nieparzystych, sumujących się do $2n+1$ Liczymy je w następujący sposób.

Jeśli z pierwszego nawiasu wybierzemy 1, to z drugiemy wyboru możemy dokonać na n sposobów, ostatnia liczba jest automatycznie wybrana. Jeśli z pierwszego nawiasu wybierzemy 3, to z drugiego wyboru dokonujemy już tylko na $n-1$ sposobów, aby nie przekroczyć $2n$. Widać, że szukana liczba wyborów to $n+n-1+\ldots+1 = \frac{1}{2}n(n+1)$.

Zauważamy ponadto, że y'_{2n+1} jest funkcją potęgową o wykładniku $5n+2$. Konkretnie zapisujemy

$$y_{2n+1}(x) = a_{2n+1}x^{5n+2}$$

Faktycznie, jeśli założymy prawdziwość tezy dla $n = 1, 3, \ldots, 2n-1$, to

$$y'_{2n+1}(x) = \sum_{\substack{i_1+i_2+i_3=2n+1 \\ 2\nmid i_1 i_2 i_3}} y_{i_1}y_{i_2}y_{i_3} = \sum_{\substack{i_1+i_2+i_3=2n+1 \\ 2\nmid i_1 i_2 i_3}} a_{i_1}a_{i_2}a_{i_3}x^{5(\frac{i_1-1}{2}+\frac{i_2-1}{2}+\frac{i_3-1}{2})+6}$$

jednak

$$5(\frac{i_1-1}{2}+\frac{i_2-1}{2}+\frac{i_3-1}{2})+6 = \frac{5}{2}(i_1+i_2+i_3) - \frac{3}{2} = \frac{5}{2}(2n+1) - \frac{3}{2} = 5n+1$$

Ale teraz trzeba brać całkę, zatem $y_{2n+1} = a_{2n+1}x^{5n+2}$, co kończy dowód indukcyjny. Będzie nas teraz interesował ciąg a_{2n+1}. Zadany jest on rekurencyjnie równaniem

$$a_{2n+1} = \frac{1}{5n+2} \sum_{\substack{i_1+i_2+i_3=2n+1 \\ 2\nmid i_1 i_2 i_3}} a_{i_1}a_{i_2}a_{i_3}$$

Pokażemy, że

$$a_{2n+1} \geq \frac{1}{2 \cdot 28^n}$$

Dowód indukcyjny: dla $n = 0$ teza zachodzi. Zakładamy prawdziwość dla $1, 2, ..., n-1$. Mamy dla $n > 0$

$$a_{2n+1} \geq \frac{1}{5n+2} \sum_{\substack{2(n_1+n_2+n_3)+6 \\ =2n+1}} \frac{1}{2^3 \cdot 28^{n_1+n_2+n_3}} = \frac{n(n+1)}{2(5n+2)} \cdot \frac{1}{8 \cdot 28^{n-1}} \geq \frac{1}{2 \cdot 28^n}$$

bo

$$\frac{n(n+1)}{2(5n+2)} \geq \frac{1}{7}$$

co kończy dowód. Oczywiście wynika stąd, że promień zbieżności

$$R(x) \leq \frac{28}{x^5}$$

(twierdzenie Cauchy'ego-Hadamarda). Z drugiej strony $R(x) > 0$ z twierdzenia o analitycznosci rozwiazania.

Zadanie 2.3. Równanie jest postaci $y' = h(y, x)$, gdzie h jest klasy C^1, zatem dla warunku początkowego $y(x_0) = y_0$ istnieje jednoznaczne rozwiązanie. Mamy $h > 0$, zatem rozwiązanie $y(x)$ jest zawsze funkcją rosnącą. Możemy napisać

$$F(y = y(x), y_0) := \int_{y_0}^{y(x)} \frac{\mathrm{d}y'}{\sqrt[3]{y'^2 + 1}} = \int_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{d}x'}{\sqrt[3]{x'^4 + 1}} =: G(x, x_0)$$

Zauważmy, że $|G(x)| < \infty$ dla $x \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Wynika to wprost z tego, że funkcja podcałkowa definiująca F jest ograniczona i

$$G(x, \varepsilon) < \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x'}{x'^{\frac{4}{3}}} < \infty$$

Jednak jeśli $y \to \infty$, to $F(y, y_0) \to \infty$, gdyż dla $y_0, y > 1$ jest

$$G(y, y_0) > \int_{y_0}^{y} \frac{\mathrm{d}y'}{\sqrt[3]{2y'^2}} = \frac{3}{\sqrt[3]{2}}\, y^{\frac{1}{3}} \longrightarrow_{y \to \infty} \infty$$

zatem $y(x) \to g < \infty$, gdy $x \to \infty$ ($y(x)$ jest rosnaca). To oznacza istnienie asymptoty poziomej dla $x \to \infty$. Oczywiście analogicznie istnieje druga (różna od poprzedniej) asymptota pozioma dla $x \to -\infty$. $\square$

Zadanie 2.4. Dla $x \neq 0$ mamy

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_{n+1} - a_{n+2})(n+1)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}(n+1)x^n$$

$$-\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}(n+2-1)x^n = (f(x) - a_0)' - \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}(n+2)x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}x^n =$$

$$= f'(x) - \frac{1}{x}(f'(x) - a_1) + \frac{1}{x^2}(f(x) - a_0 - a_1 x) = f'(x) - \frac{1}{x} f'(x) + \frac{1}{x^2} f(x)$$

czyli

$$f(x)\big(1 - \frac{1}{x^2}\big) = f'(x)\big(1 - \frac{1}{x}\big)$$

co przepisujemy jako

$$y' = y\big(1 + \frac{1}{x}\big)$$
$$\ln Cy = x + \ln x$$
$$Cy = e^{x + \ln x} = xe^x$$

Pamiętając o tym, że $y'(0) = a$ otrzymujemy

$$Ca = (e^x + xe^x)(0) = 1$$

Tak więc ostatecznie

$$f(x) = axe^x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a}{(n-1)!} x^n$$

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{gdy } n = 0 \\ \frac{a}{(n-1)!} & \text{gdy } n > 0 \end{cases}$$

Zadanie 2.5. Wprowadzamy współrzędne biegunowe. Mamy

$$\dot{r} = \frac{1}{r}(\dot{y}y + \dot{x}x) = \frac{1}{r}((-x - yf(x,y))y + yx) = \frac{-xy}{r^2} rf(x,y) = -rf(r,\phi)\sin^2\phi$$

$$\dot{\phi} = \frac{1}{r^2}(\dot{y}x - \dot{x}y) = \frac{1}{r^2}((-x - yf(x,y))x - y^2) = -1 - f(r,\phi)\sin\phi\cos\phi$$

Po pierwsze, zauważmy, że

$$\dot{\phi} = -1 - \frac{1}{2}f(r,\phi)\sin 2\phi \leq -1 + |\frac{1}{2}f(r,\phi)|| \leq -1 + \frac{c}{2} < 0$$

Zatem dla niezerowego rozwiązania układ obraca się zgodnie z ruchem wskazówek zegara z prędkością kątową oddzieloną od 0. Zajmijmy się teraz zmianami r. Chcemy pokazać, że jeśli wybierzemy punkt startowy dostatecznie daleko, to po jednym obrocie zbliżymy się do (0,0). Wiemy, że dla $r^2 > R$ jest $f(r,\phi) > 0$ Niech teraz $r_0^2 > R$. To pociąga $\dot{r} < 0$ w punkcie początkowym. Wówczas po jednym obrocie przybliżymy się do (0,0). Gdybyśmy bowiem się oddalili, to musielibyśmy przeciąć brzeg koła $r \leq r_0$, wychodząc z niego, a to oznacza, że w punkcie przecięcia jest $\dot{r} > 0$, co przeczy wyborowi r_0. Skoro $f(0,0) < 0$, to $f(r,\phi) < 0$ dla $r < \varepsilon$ (z gładkości f). Zatem jeśli r_0 jest dostatecznie małe, to na mocy analogicznych argumentów po jednym obrocie oddalimy się od (0,0). Mamy więc rozważone dwie krzywe, będące rozwiązaniami. Jeśli któraś z tych krzywych ma samoprzecięcie, to już mamy okresowe rozwiązanie (przez dany punkt przechodzi tylko jedno rozwiązanie). W przeciwnym przypadku niech $a_{1,n}, a_{2,n}$ będą przecięciami rozpatrywanych rozwiązań z osią OX kolejno dla pierwszej i drugiej krzywej (uzyskiwanymi dla rosnących czasów t). Ciąg a_n jest malejący, ciąg b_n jest rosnący. Są one oczywiście ograniczone. Niech A_1, A_2 będą granicami tych ciągów. Jeśli $A_1 = A_2 = g$, to rozwiązanie startujące z punktu $(|g|, 0)$ jest okresowe. Jeśli bowiem po jednym okrążeniu bylibyśmy dalej lub bliżej niż na początku, to musielibyśmy po drodze przeciąć któreś z dwóch wyjściowych rozwiązań, co daje sprzeczność z jednoznacznością.

Przypuśćmy zatem, że $A_1 \neq A_2$. W tym przypadku rozpatrujemy $\frac{1}{2}(A_1 + A_2)$ jako nowy warunek początkowy na osi OX. Tworzymy anologicznie ciąg $a_{3,n}$ z granicą A_3. Teraz powtarzamy operację z braniem średniej arytmetycznej dla tej spośród par $(a,b) \in \{(A_1, A_3), (A_2, A_3)\}$, dla której $|a - b|$ ma mniejszą wartość. W ten sposób tworzy się ciąg A_n, który, jak łatwo widzieć jest już zbieżny do pewnej granicy g. Jeśli teraz rozważymy warunek początkowy (np. dla (t=0)) $(r_0, \phi_0) = (g, 0)$, to otrzymamy rozwiązanie okresowe, na mocy przytaczanych już wcześniej argumentów. $\square$

Zestaw III

Zadanie 3.1. Niech $U(x)$ będzie potencjałem. Mamy $\ddot{x} = -\frac{\partial U}{\partial x}$. Zatem bierzemy $U(x) = -\omega^2 \cos x$. Wtedy

$$\frac{1}{2}\dot{x}^2 + U(x) = \frac{1}{2}\dot{x}^2 - \omega^2 \cos x = const. = E$$

Jeśli x_0 jest początkowym kątowym wychyleniem wahadła, to jest $E = -\omega^2 \cos x_0$, gdyż prędkość dla maksymalnego wychylenia jest równa 0. Stąd dostaniemy

$$\dot{x}^2 = 2(\omega^2 \cos x - \omega^2 \cos x_0) = 4\omega^2(\sin^2 \frac{1}{2}x_0 - \sin^2 \frac{1}{2}x)$$

Będziemy pisali wzór na $\frac{1}{4}$ okresu, rozpartując ruch wahadła od położenia równowagi, do maksymalnego wychylenia. Zatem

$$\frac{1}{4}T(x_0) = \int_0^{x_0} \frac{\mathrm{d}x}{2\omega\sqrt{\sin^2 \frac{1}{2}x_0 - \sin^2 \frac{1}{2}x}}$$

Teraz chcemy uniezależnić się od x_0 w granicy całkowania. Wykonujemy podstawienie $\sin \frac{1}{2}x = \sin \frac{1}{2}x_0 \sin u$. Wówczas u zmienia się od 0 do $\frac{\pi}{2}$ i $\frac{1}{2} \cos \frac{1}{2}x\mathrm{d}x = \sin \frac{1}{2}x_0 \cos u\mathrm{d}u$. Zatem

$$\int_0^{x_0} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\sin^2 \frac{1}{2}x_0 - \sin^2 \frac{1}{2}x}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{\sin^2 \frac{1}{2}x_0(1 - \sin^2 u)}} \cdot \frac{\sin \frac{1}{2}x_0 \cos u}{\frac{1}{2}\sqrt{1 - \sin^2 \frac{1}{2}x_0 \sin^2 u}}\,\mathrm{d}u$$

Czyli

$$T(x_0) = \frac{4}{\omega}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{1}{2}x_0 \sin^2 u}}$$

Dla $x_0 \neq \pi$ jest to całka właściwa. Spełnione są założenia twierdzenia Leibniza, zatem przy obliczaniu pochodnej możemy całkować pochodną funkcji podcałkowej:

$$T'(x_0) = \frac{4}{\omega}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \frac{1}{2}x_0 \cos \frac{1}{2}x_0 \sin^2 u}{2(1 - \sin^2 \frac{1}{2}x_0 \sin^2 u)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}u$$

Zatem oczywiście $T'(0) = 0$.

Zadanie 3.2. Z rozwiązania zadania 1 wynika, że

$$P(A) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\phi}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{1}{2}A \sin^2 \phi}}$$

Dla wygody podstawiamy $2a = \pi - A$ i $\phi = \frac{\pi}{2} - x$. Musimy pokazać, że wielkość

$$\frac{P(a)}{\ln 2a} = \frac{1}{\ln 2a}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\phi}{\sqrt{1 - \cos^2 a \cos^2 \phi}}$$

jest ograniczona i oddzielona od 0 dla $a \to 0^+$. Mamy

$$1 - \cos^2 a \cos^2 \phi = \sin^2 a + \cos^2 a - \cos^2 a \cos^2 \phi = \sin^2 a + \cos^2 a \sin^2 \phi$$

Zatem rozpatrywane wyrażenie przybiera następującą postać

$$\frac{1}{\ln 2a} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\phi}{\sqrt{\sin^2 a + \cos^2 a \sin^2 \phi}} = \frac{1}{\ln 2a \cos a} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\phi}{\sqrt{\mathrm{tg}^2 a + \sin^2 \phi}}$$

Po tych przygotowaniach zauważmy, że dla $\phi \in [0, 2\pi]$ jest

$$\frac{2}{\pi}\phi \leq \sin\phi \leq \phi$$

Pierwsza nierówność wynika z wklęsłości funcji sin, druga z nierówności $\sin' \phi = \cos\phi \leq 1 = \phi'$ Oszacujemy nasze wyrażenie z góry. Mamy dla $\ln 2a < 0$

$$\frac{P(a)}{\ln 2a} \leq \frac{1}{\ln 2a \cos a} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\phi}{\sqrt{\mathrm{tg}^2 a + \phi^2}} = \frac{1}{\ln 2a \cos a} \Big[\ln |\phi + \sqrt{\mathrm{tg}^2 a + \phi^2}| \Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{\ln 2a \cos a} \Big[\ln \Big(\frac{\pi}{2} + \sqrt{\mathrm{tg}^2 a + \Big(\frac{\pi}{2}\Big)^2} \Big) - \ln \mathrm{tg}\phi \Big] \longrightarrow \lim_{a \to 0^+} - \frac{\ln \mathrm{tg} a}{\ln 2a} = -1$$

Szacowanie z dołu, korzystające z pierwszej nierówności jest analogiczne i nie będziemy go tu *explicite* wypisywać. Daje ono ostatecznie, jak łatwo widzieć

$$-1 \geq \limsup_{a \to 0^+} \frac{P(a)}{\ln 2a} \geq \liminf_{a \to 0^+} \frac{P(a)}{\ln 2a} \geq -\frac{\pi}{2}$$

Zadanie 3.3. Zadanie rozwiążemy metodą brutalnej siły. W poniższym układzie równań pierwsze równanie mówi o stałości prędkości wilka, a drugie o tym, że wilk biegnie w kierunku zająca.

$$\begin{cases} \dot{y}^2 + \dot{x}^2 = v_w^2 \\ \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{v_z t - y}{-x} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \dot{y}^2 + \dot{x}^2 = v_w^2 \\ \dot{x}y - x\dot{y} = \dot{x} v_z t \end{cases}$$

Ułożymy równanie na $x(t)$. Mamy

$$\dot{y} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(V_z t + x\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\big) = V_z + \dot{x}\frac{\dot{y}}{\dot{x}} + x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$$

Czyli

$$V_z = -x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sqrt{\frac{V_w^2}{\dot{x}^2} - 1} = -x\frac{1}{2\sqrt{\frac{V_w^2}{\dot{x}^2} - 1}}\Big(-2\frac{V_w^2}{\dot{x}^3}\ddot{x}\Big) = \frac{x\ddot{x}}{\dot{x}^2}\frac{V_w^2}{\sqrt{V_w^2 - \dot{x}^2}}$$

Podstawiamy $\dot{y} = u$. Wówczas $\ddot{x} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}u$. Zatem

$$V_z = \frac{x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}}{u} \cdot \frac{V_w^2}{\sqrt{V_w^2 - u^2}} \Longrightarrow V_z\frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{V_w^2 \mathrm{d}u}{u\sqrt{V_w^2 - u^2}}$$

W skończonym czasie, stosując trygonometryczne podstawienie, otrzymamy

$$V_z \ln|x| + C = -V_w \ln\left|\frac{V_w + \sqrt{V_w^2 - u^2}}{u}\right|$$

Dla $x = -A$ mamy $u = V_w$, stąd $C = -V_z \ln|A|$. Otrzymujemy

$$\left|\frac{x}{A}\right|^{V_z/V_w} = \left|\frac{u}{V_w + \sqrt{V_w^2 - u^2}}\right|$$

Oznaczamy $f(x) = \left|\frac{x}{A}\right|^{V_z/V_w}$. Wtedy

$$f(x)\sqrt{V_w^2 - u^2} = u - f(x)V_w$$

Co po podniesieniu do kwadratu da bardzo szybko

$$u = \frac{2f(x)V_w}{1 - (f(x))^2}$$

Gdy wilk dogoni zająca będzie $x = 0$. Przyjmujemy $A > 0$, zatem szukany czas T jest równy

$$T = \frac{1}{2V_w}\int_{-A}^{0} \frac{1 - \left|\frac{x}{A}\right|^{2V_z/V_w}}{2\left|\frac{x}{A}\right|^{V_z/V_w}}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{2V_w}\int_{-A}^{0}\left[\left(\frac{-x}{A}\right)^{-\frac{V_z}{V_w}} - \left(\frac{-x}{A}\right)^{\frac{V_z}{V_w}}\right]\mathrm{d}x =$$

$$= -A\frac{1}{2V_w}\int_{1}^{0}\left[z^{-\frac{V_z}{V_w}} - z^{\frac{V_z}{V_w}}\right]\mathrm{d}z = -A\frac{1}{2V_w}\left[\frac{1}{-\frac{V_z}{V_w}+1} z^{-\frac{V_z}{V_w}+1} - \frac{1}{\frac{V_z}{V_w}+1} z^{\frac{V_z}{V_w}+1}\right]_1^0 =$$

$$= -A\frac{1}{2V_w}\left[-\frac{V_w}{V_w - V_z} + \frac{V_w}{V_w + V_z}\right] = -\frac{A}{2}\cdot\frac{-2V_z}{V_w^2 - V_z^2} = \frac{AV_z}{V_w^2 - V_z^2}$$

Zadanie 3.4. Zbiory $L = \{(x, y) : x \geq 0, y = 1\}$, $P = \{(x, y) : x \geq 0, y = -1\}$, $B = \{(x, y) : x = 0, |y| \leq 1\}$ będziemy nazywać kolejno lewym prętem, prawym prętem i belką. Z założeń wynika, że z belki rozwiązania są spychane do cylindra, a z prętów rozwiązania są wyrzucane poza cylinder. Przypuśćmy, że żadne rozwiązanie przechodzące przez belkę nie pozostaje nieskończenie długo w cylindrze. Dla punktu $p \in B$ rozważamy $f(p) \in \partial C$ punkt, w którym rozwiązanie przechodzące przez p opuszcza cylinder. Musi być $f(p) \in L \cup P$, bo na belce rozwiązania są wpychane do C. Jeśli punkt p_1 leży bliżej L niż punkt p_2, to nie może się zdarzyć, że $f(p_1) \in P$ i $f(p_2) \in L$, bo wtedy rozwiązania się przecinają, co przeczy jednoznaczności (układ klasy C^1). Niech $y_0 = \inf\{y : f(0, y) \in L, (0, y) \in B\}$. Niech $b_0 = (0, y_0)$. Możemy zakładać, bez straty ogólności, że $f(b_0) \in P$. Rozpatrujemy s_0 dowolny punkt prawego pręta, który leży dalej od belki niż $f(b_0)$. Rozwiązanie przechodzące przez s_0 wychodzi z cylindra. Zastanówmy się, co było wcześniej. Rozwiązanie nie mogło wejść do cylindra z $L \cup P$, bo tam rozwiązania są wypychane z C. Zatem rozwiązanie musiałoby wejść do cylindra z belki. Ale niestety nie mogło wejść na lewo od b_0, bo przecięłoby rozwiązania wychodzące na L. Nie mogło też wejść na prawo od b_0, bo przecięłoby rozwiązanie dla b_0. W końcu nie mogło wejść w b_0, bo to przeczy jednoznaczności. Zatem rozwiązanie nigdy nie weszło do cylindra. □

Zadanie 3.5. Rozwiązujemy równanie jednorodne dla $x > 0$. Rozwiązanie dla $x < 0$ jest analogiczne.

$$y' = -a\frac{y}{x}$$
$$y = Cx^{-a}$$

Teraz stosujemy metodę uzmienniania stałej $C := C(x)$

$$y' = C'(x)x^{-a} - C(x)ax^{-a-1} = -a\frac{y}{x} + \frac{f(x)}{x} = -aC(x)x^{-a-1} + \frac{f(x)}{x}$$

$$C'(x) = \frac{f(x)}{x}x^a = f(x)x^{a-1}$$

Możemy przyjąć

$$C(x) = \int_0^x f(x')x'^{a-1}\,\mathrm{d}x' + D$$

jako, że funcja $f(x)x^{a-1}$ jest całkowalna w otoczeniu 0. Konkretnie, całka niewłaściwa istnieje, gdyż $a-1 > -1$ i granica $f(x)$ przy $x \to 0$ istnieje (korzystamy z asymptotycznego kryterium porównawczego zbieżności całek). Zapisujemy rozwiązanie ogólne w postaci

$$y(x) = \left[\int_0^x f(x')x'^{a-1}\,\mathrm{d}x' + D\right]x^{-a}$$

Dla $|x| < \delta$ mamy $|f(x) - b| < \varepsilon$, zatem wówczas

$$\left|x^{-a}\int_0^x f(x')x'^{a-1}\,\mathrm{d}x' - \frac{b}{a}\right| = \left|x^{-a}\int_0^x \left[f(x')x'^{a-1} - bx^{a-1}\right]\mathrm{d}x'\right|$$
$$\leq \left|x^{-a}\int_0^x \varepsilon x'^{a-1}\,\mathrm{d}x'\right| = x^{-a}x^a\frac{\varepsilon}{a} = \frac{\varepsilon}{a}$$

Z dowolności ε otrzymujemy

$$\lim_{x\to 0} x^{-a}\int_0^x f(x')x'^{a-1}\,\mathrm{d}x' = \frac{b}{a}$$

Zatem

$$\lim_{x\to 0} y(x) = \frac{b}{a} + D\lim_{a\to 0^+} x^{-a} = \begin{cases} \frac{b}{a} & \text{gdy} \quad D \neq 0 \\ \pm\infty & \text{gdy} \quad D = 0 \end{cases}$$

Pokazaliśmy więc, że rozwiązanie jest ograniczone jedynie dla $D = 0$ i znaleźliśmy jego granicę przy $x \to 0$ równą $\frac{b}{a}$. Tę samą granicę otrzymamy dla jedynego ograniczonego rozwiązania przy $x < 0$

Zadanie 3.6. W rozwiązaniu t spełnia rolę x. Równanie przedstawiamy w formie układu równań

$$\begin{cases} \dot{y} = u \\ \dot{u} = -ty \end{cases}$$

Wykonujemy podstawienie

$$\begin{cases} y = r\sin\varphi \\ u = r\cos\varphi \end{cases}$$

Otrzymujemy

$$\begin{cases} \dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi = r\cos\varphi \\ \dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi = r\sin\varphi \end{cases}$$

Mnożąc pierwsze równanie przez $\cos\varphi$, a drugie przez $-\sin\varphi$ i dodając stronami otrzymamy kluczowe równanie na zmienną φ

$$\dot{\varphi} = \cos^2\varphi + t\sin^2\varphi$$

Będziemy rozpatrywać tylko $t \geq 0$. Skorzystamy z następującego faktu: jeśli mamy dwa równania postaci $\dot{\varphi}_1 = f_1(\varphi_1, t)$, $\dot{\varphi}_2 = f_2(\varphi_2, t)$, gdzie $f_1 \geq f_2$ oraz f_1, f_2 gładkie, to dla ustalonego warunku początkowego $\varphi(t_0) = \varphi_0$ identycznego dla obydwu równań otrzymamy $\varphi_1(t) \geq \varphi_2(t)$. Faktycznie, jeśli dla pewnego t zachodzi $\varphi_1(t) = \varphi_2(t)$, to w otoczeniu tego punktu $\dot{\varphi_1} \geq \dot{\varphi_2}$.

Rozpatrywane równanie daje oczywiście funkcję $\varphi(t)$ rosnącą. Mamy stwierdzić, że $\varphi(t)$ conajmniej 15 razy przejdzie przez punkt postaci $k\pi$, czyli da miejsce zerowe funkcji $\sin\varphi$. To oczywiście oznacza wystąpienie miejsca zerowego $y(t)$. Równania na φ raczej nie sposób rozwiązać. Jednak dla pokazania tezy wystarczy rozpatrywać równanie

$$\dot{\varphi} = \begin{cases} 0 & \text{gdy } 0 \leq t < 1 \\ 1 & \text{gdy } 1 \leq t < \frac{25}{3} \\ \cos^2\varphi + \frac{25}{3}\sin^2\varphi & \text{gdy } \frac{25}{3} \leq t \leq 25 \end{cases}$$

Dla $1 \leq t < \frac{25}{3}$ $\Delta\varphi = \frac{22}{3} > 2\pi$, co oznacza, że w tym przedziale mamy co najmniej 2 miejsca zerowe. Dla $\frac{25}{3} \leq t \leq 25$ mamy

$$t_1 - t_0 = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \frac{\mathrm{d}\varphi}{\cos^2\varphi + \frac{25}{3}\sin^2\varphi} = \frac{\sqrt{3}}{5}\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \frac{\frac{5}{\sqrt{3}}\frac{1}{\cos^2\varphi}}{1 + (\frac{5}{\sqrt{3}}\mathrm{tg}\varphi)^2}\,\mathrm{d}\varphi$$

Zatem dla naszych granic całkowania

$$t_1 - t_0 = \frac{50}{3} = \Big[\frac{\sqrt{3}}{5}\mathrm{arctg}\Big(\frac{5}{\sqrt{3}}\mathrm{tg}\varphi\Big)\Big]_{\varphi_0}^{\varphi_1} = [F(\varphi)]_{\varphi_0}^{\varphi_1}$$

Należy teraz postępować ostrożnie, gdyż funkcja pierwotna nie jest ciągła. Mamy

$$[F(\varphi)]_{-\frac{\pi}{2}+k\pi}^{\frac{\pi}{2}+k\pi} = 2\frac{\sqrt{3}}{5}\lim_{x\to+\infty}\arctan x = \pi\frac{\sqrt{3}}{5}$$

Funkcja pierwotna jest okresowa. Przyrostowi funkcji pierwotnej (w sensie sumy przyrostów na odcinkach, na których jest ona ciągła) o wartość $\pi\frac{\sqrt{3}}{5}$ odpowiada, jak łatwo zauważyć przyrost argumentu φ o π, czyli jedno miejse zerowe funkcji $\sin\varphi$. Mamy jednak

$$\frac{50}{3} > \pi\frac{\sqrt{3}}{5} \cdot 15$$

Zatem wykryliśmy co najmniej 15 nowych miejsc zerowych $y(t)$. Ostatecznie pokazaliśmy, że jest co najmniej 17 miejsc zerowych. $\square$