

Zadania przygotowawcze przed kolokwium.

Dla tych, którzy lubią siedzieć w domu w czerwcowe popołudnia...

Zadanie 1. Dla podanych poniżej równań wypisz rozwiązanie ogólne jego równania jednorodnego oraz możliwie prostą postać szczególnego rozwiązania niejednorodnego. Nie musisz wyliczać stałych współczynników.

- (a) $y'' + 4y' + 4y = e^{3x} \cos x - 2x^2 e^{-2x}$;
- (b) $y'' - 2y' + 2y = x e^x \cos x + 1$;
- (c) $y'' + 6y' + 13y = x^2 e^{-3x} \sin 2x - x e^x$;
- (d) $y'' + y = x \cos x + x \sin 2x$.

Zadanie 2. Rozwiąż równania zupełne:

- (a) $3x^2 \ln y dx + \frac{x^3}{y} dy = 0$;
- (b) $(18x^2 - \frac{y}{x^2} \cos \frac{y}{x}) dx + (8y + \frac{1}{x} \cos \frac{y}{x}) dy = 0$;
- (c) $(e^{x \cos y} \cos y + \ln y) dx + (-x \sin y e^{x \cos y} + \frac{x}{y}) dy = 0$;
- (d) $(2x^4 + 12xy^2 + 10x^2y + 3x^2 + 5y) dx + (12y + 5x) dy = 0$.

Zadanie 3. Zbadaj stabilność i asymptotyczną stabilność rozwiązania zerowego układu $\dot{x} = Ax$, gdzie A jest zadana wzorem

- (a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$;
- (b) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$;
- (c) $\begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$;
- (d) $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

O stabilności będziemy mówić na ostatnich zajęciach. Te przykłady są jednak bardzo, bardzo elementarne.

Zadanie 4 (zob. Samoljenko et al.). Rozwiązać równanie

$$(x^2 + y^2 + a)y \frac{dy}{dx} + (x^2 + y^2 - a)x = 0,$$

gdzie a parametr.

Wskazówka: wymnożyć stronami przez dx i znaleźć rozwiązanie (tj. całkę pierwszą) uzyskanego równania zupełnego.

Maciej Borodzik