1. Zadania

Druga połowa kolokwium z RRZ
2 czerwca 2008.

Grupa (C)

Czas pisania 45 minut

Zadanie 1. Rozpatrzmy równanie

$$y'' + 2y' + 5y = x^2 e^{-x} \cos 2x + xe^{2x}.$$

2pkt Podaj rozwiązanie ogólne *równania jednorodnego* odpowiadającego powyższemu równaniu.
3pkt Podaj *możliwie najprostszą* postać rozwiązania równania niejednorodnego. Nie trzeba wyliczać stałych współczynników przy poszczególnych funkcjach.

Zadanie 2. Niech v będzie gładkim polem wektorowym w $\mathbb{R}^3$, zaś F i G dwoma niezależnymi całkami pierwszymi układu

$$\dot{x} = v(x).$$

Niech spełnione będą dodatkowo następujące założenia:

(a) Obraz odwzorowania $x \mapsto (F(x), G(x)) \in \mathbb{R}^2$ ma niepuste wnętrze.
(b) Dla każdego $y \in \mathbb{R}$ przeciwobrazy $F^{-1}(y)$ i $G^{-1}(y)$ są zwarte.
(c) v ma skończenie wiele punktów stacjonarnych.

Wykaż, że istnieje rozwiązanie okresowe.

Druga połowa kolokwium z RRZ
2 czerwca 2008.

Grupa (D)

Czas pisania 45 minut

Zadanie 1. Rozpatrzmy równanie

$$y'' + 2y' + 5y = x^2 e^{-x} \cos 2x + xe^{3x}.$$

2pkt Podaj rozwiązanie ogólne *równania jednorodnego* odpowiadającego powyższemu równaniu.
3pkt Podaj *możliwie najprostszą* postać rozwiązania równania niejednorodnego. Nie trzeba wyliczać stałych współczynników przy poszczególnych funkcjach.

Zadanie 2. Niech v będzie gładkim polem wektorowym w $\mathbb{R}^3$, zaś F i G dwoma niezależnymi całkami pierwszymi układu

$$\dot{x} = v(x).$$

Niech spełnione będą dodatkowo następujące założenia:

(a) Dla prawie wszystkich punktów $x \in \mathbb{R}^3$, $\nabla F(x)$ i $\nabla G(x)$ rozpinają przestrzeń dwuwymiarową.
(b) Dla każdego $y \in \mathbb{R}$ przeciwobrazy $F^{-1}(y)$ i $G^{-1}(y)$ są zwarte.

2. Rozwiązania.

Rozwiązania są niemal identyczne w obu grupach.

Rozwiązanie 1. Rozpatrzmy równanie jednorodne.

$$y'' + 2y' + 5y = 0.$$

Odpowiadające mu równanie charakterystyczne

$$\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0 \tag{1}$$

ma pierwiastki $\lambda_1 = -1 + 2i$, $\lambda_2 = -1 - 2i$.

Rozwiązanie ogólne równania jednorodnego jest więc kombinacją liniową funkcji $e^{\lambda_1 x}$ i $e^{\lambda_2}x$. Korzystając ze wzoru de Moivre'a możemy zamienić e do potęgi zespolonej na e razy cosinus bądź sinus i dostać ostateczną postać

$$y = Ae^{-x}\cos 2x + Be^{-x}\sin 2x.$$

Teraz znajdźmy postać rozwiązania szczególnego. Najpierw, bo łatwiej, znajdziemy postać takiego y_1, że

$$y_1'' + 2y_1' + 5y_1 = xe^{2x}.$$

Po prawej stronie mamy wielomian stopnia 1 wymnożony przez $e^{\mu_1 x}$, gdzie $\mu_1 = 2$ i nie jest pierwiastkiem równania (1). Stąd przewidywane rozwiązanie będzie wielomianem nadal stopnia 1 pomnożonym przez e^{2x}. A więc przewidujemy, że

$$y_1 = (a_1 x + b_1)e^{2x}.$$

Stałe a_1 i b_1 można wyznaczyć, ale nie należy to do treści zadania.

Znajdźmy teraz takie y_2, że

$$y_2'' + 2y_2' + 5y_2 = x^2 e^{-x}\cos 2x.$$

Tutaj po prawej stronie mamy wielomian stopnia 2 (nic z tego, że jest taki prosty), wymnożony przez $e^{-x}\cos 2x$ albo też, co jest potrzebne do rozwiązania zadania, przez $\frac{1}{2}e^{(-1+2i)x} + \frac{1}{2}e^{(-1-2i)x}$.

Sytuacja jest trochę inna: $-1 \pm 2i$ jest pierwiastkiem jednokrotnym wielomianu (1). To znaczy, że przewidywane rozwiązanie będzie postaci $e^{(-1+2i)x}$ pomnożony przez wielomian stopnia $2 + 1 = 3$ plus $e^{(-1-2i)x}$ razy wielomian stopnia 3.

Czyli

$$y_2 = (a_{23}x^3 + a_{22}x^2 + a_{21}x + a_{20})e^{(-1+2i)x} + (b_{23}x^3 + b_{22}x^2 + b_{21}x + b_{20})e^{(-1-2i)x}.$$

Zauważmy jednak, że możemy przyjąć $a_{20} = b_{20} = 0$, bo funkcje $e^{(-1\pm 2i)x}$ są w jądrze operatora D^2+2D+5 i jako takie na pewno przejdą na zero.

Zmieniając bazę z $e^{(-1\pm 2i)x}$ na $e^{-x}\cos 2x, e^{-x}\sin 2x$ otrzymujemy ostateczne rozwiązanie

$$y_2 = (c_{23}x^3 + c_{22}x^2 + c_{21}x)e^{-x}\cos 2x + (d_{23}x^3 + d_{22}x^2 + d_{21}x)e^{-x}\sin 2x.$$

Ostateczna odpowiedź w drugiej części zadania to $y_1 + y_2$.

Rozwiązanie 2. Niech $x_1, \ldots, x_n$ będą punktami stacjonarnymi. Niech $y_1, \ldots, y_n$ będą punktami z $\mathbb{R}^2$ — $y_i = (F(x_i), G(x_i))$.

Z założenia (a) obraz $(F(x), G(x))$ zawiera zbiór otwarty U. Niech $U' = U \setminus \{y_1, \ldots, y_n\}$. Z twierdzenia Sarda w U' istnieje wartość niekrytyczna. Niech $y = (y_a, y_b)$ będzie wartością niekrytyczną.

Z twierdzenia o funkcji uwikłanej przeciwobraz $C = F^{-1}(y_a) \cap G^{-1}(y_b)$ jest rozmaitością wymiaru 1. Z założenia (b) C jest zwarty. Stąd C jest okręgiem.

Trajektoria pola startująca z dowolnego punktu na okręgu będzie cały czas na tym okręgu pozostawała. Nie może ona dojść do punktu stacjonarnego, bo wiemy, że v nie zeruje się na okręgu. Pokażemy (tu można zamachać rękami), że trajektoria jest zamknięta.

C jako zwarta podrozmaitość wymiaru 1 ma skończoną długość $l > 0$. Pole v na l nie znika, przeto funkcja $x \to ||v(x)||$ na C nie przyjmuje wartości 0. Ze zwartości C istnieje taka stała $a > 0$, że $||v(x)|| > a$ na C.

Teraz jest już oczywiste, że trajektoria po czasie co najwyżej l/a obejdzie okrąg.

W grupie D nie trzeba było korzystać z twierdzenia Sarda, wystarczyło odpowiednio zdefiniować "prawie wszystkie", żeby wywnioskować iż istnieje taki x, że $F^{-1}(F(x)) \cap G^{-1}(G(x))$ jest gładkie. Do tego stosuje się twierdzenie o funkcji uwikłanej.