Pierwsza połowa kolokwium z RRZ
28 kwietnia 2008.
Czas pisania 45 minut

Grupa C

Zadanie 1. Dane jest równanie różniczkowe

$$y' = a(x)y + b(x), \tag{1}$$

gdzie a i b są funkcjami gładkimi poza zbiorem $S = \{x_1, \ldots, x_n\} \subset \mathbb{R}$ oraz dla każdego $i = 1, \ldots, n$ funkcje $(x - x_i)a(x)$ i $(x - x_i)b(x)$ są ograniczone w otoczeniu x_i.

Wykaż, że istnieją takie skończone liczby $\{k_1, \ldots, k_n\}$, że jeśli $y(x)$ jest rozwiązaniem (1), to $(x - x_i)^{k_i} \cdot y(x)$ jest ograniczone w otoczeniu x_i.

(*) (Wcale nie jest trudne, ale jest mało czasu). Podaj przykład takich funkcji $a(x)$, $b(x)$, gładkich poza $x_1 = 0$ takich, że $x^2 a(x)$ i $x^2 b(x)$ są ograniczone w zerze, że istnieje rozwiązanie (1) $y(x)$ uciekające do nieskończoności przy $x \to 0$ z szybkością ponadwielomianową.

Zadanie 2. Niech $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ będzie funkcją gładką. Rozważmy równanie

$$y' = \nabla f(y)$$

z warunkiem początkowym $y(x_0) = y_0 + \varepsilon v$, $v \in \mathbb{R}^2$. Załóżmy, że dla $\varepsilon = 0$ rozwiązaniem równania jest funkcja $y(x)$.

Wypisz równanie różniczkowe, które spełnia funkcja

$$\left.\frac{\partial y}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}.$$

Pierwsza połowa kolokwium z RRZ
28 kwietnia 2008.
Czas pisania 45 minut

Grupa C

Zadanie 1. Dane jest równanie różniczkowe

$$y' = a(x)y + b(x), \tag{2}$$

gdzie a i b są funkcjami gładkimi poza zbiorem $S = \{x_1, \ldots, x_n\} \subset \mathbb{R}$ oraz dla każdego $i = 1, \ldots, n$ funkcje $(x - x_i)a(x)$ i $(x - x_i)b(x)$ są ograniczone w otoczeniu x_i.

Wykaż, że istnieją takie skończone liczby $\{k_1, \ldots, k_n\}$, że jeśli $y(x)$ jest rozwiązaniem (2), to $(x - x_i)^{k_i} \cdot y(x)$ jest ograniczone w otoczeniu x_i.

(*) (Wcale nie jest trudne, ale jest mało czasu). Podaj przykład takich funkcji $a(x)$, $b(x)$, gładkich poza $x_1 = 0$ takich, że $x^2 a(x)$ i $x^2 b(x)$ są ograniczone w zerze, że istnieje rozwiązanie (1) $y(x)$ uciekające do nieskończoności przy $x \to 0$ z szybkością ponadwielomianową.

Zadanie 2. Niech $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ będzie funkcją gładką. Rozważmy równanie

$$y' = \nabla f(y)$$

z warunkiem początkowym $y(x_0) = y_0 + \varepsilon v$, $v \in \mathbb{R}^2$. Załóżmy, że dla $\varepsilon = 0$ rozwiązaniem równania jest funkcja $y(x)$.

Wypisz równanie różniczkowe, które spełnia funkcja

$$\left.\frac{\partial y}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}.$$