O minimalnym spadku i układach liniowych.

Zajmijmy się najpierw spadkiem z punktu $(0,1)$ do punktu $(1,0)$ po krzywej $y(x)$. W punkcie $x=0$ szafa ma zerową prędkość. Jej energia kinetyczna wynosi 0, potencjalna 1. W punkcie x jej energia całkowita wynosi nadal 1, zaś potencjalna $y(x)$, gdyż jest to wysokość. W związku z tym prędkość szafy wynosi, z dokładnością do wyboru stałej, $\sqrt{1-y}$. Z drugiej strony jest to prędkość skierowana pod kątem. Składowa pozioma prędkości stanowi $\frac{1}{\sqrt{1+(y')^2}}$ prędkości całkowitej, co liczyliśmy na ćwiczeniach.

W zwzwiązku z tym składowa pozioma prędkości wynosi $\frac{\sqrt{1-y}}{\sqrt{1+(y')^2}}$. Czas zjazdu szafy to $\int \frac{1}{v}$ zgodnie ze wzorem „czas=droga/prędkość”. Zatem rozpatrywany przez nas funkcjonał ma postać:

$$T[y] = \int_0^1 \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{1-y}}\,dx,$$

a nie odwrotnie, jak było omyłkowo w zestawie.

Oznaczmy przez $F(y,y')$ wielkość $\frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{1-y}}$. Równanie Eulera–Lagrange'a przyjmuje postać:

$$F - y'F_{y'} = C. \qquad EL1$$

Wstawiając funkcjonał uzyskujemy:

$$\frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{1-y}} - (y')^2\frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{1-y}\,(1+(y')^2)} = C.$$

Mnożymy stronami przez $\sqrt{1-y}(1+(y')^2)$. W pierwszych dwóch członach $(1+(y')^2)$ z pierwszego częściowo kasuje się z $(y')^2$ z drugiego. Ostatecznie otrzymujemy:

$$C\sqrt{1-y} = \sqrt{1+(y')^2}.$$

Możemy dokonać upraszczającego podstawienia: $u = 1-y$, $u' = -y'$. Przy czym pamiętamy, że krzywa $y(x)$ spadała w dół, a więc $y' \le 0$, a zatem $u' \ge 0$. W takim wypadku uzyskujemy równanie:

$$Cu = \sqrt{1+(u')^2},$$

a ostatecznie:

$$u' = +\sqrt{C^2u-1}.$$

Zauważamy, że wybór znaku wynika z tego, że $u' \ge 0$. Rozwiązujemy to równanie, czego już robił nie będę.

Rozważmy teraz równania linowe postaci $\dot{x} = Ax$, gdzie $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Po pierwsze $x = (x_1, x_2)$ oraz $Ax = (x_1+x_2, x_2)$. Wektor $v_1 = (1,0)$ jest wektorem własnym, natomiast wektor $v_2 = (0,1)$ pod działaniem macierzy $A - Id$ przejdzie na v_1, a więc jest uogólnionym wektorem własnym (uww). Równanie rozpada się na układ dwóch równań:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_2, \end{aligned}$$

gdzie x_1 jest składową w kierunku wektora własnego, zaś x_2 w kierunku uww.

Przykład: Rozwiązujemy równanie $\dot{x} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} x$. Wartości własne macierzy A wynoszą po 1. Wektorem własnym jest $(2,-1)$ oznaczamy go ε_1 za uww. przyjmujemy $(-1,1)$ i oznaczamy go ε_2. Wektor x zapisujemy jako $y_1\varepsilon_1 + y_2\varepsilon_2$. Równanie na y przyjmuje postać:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_1 + y_2 \\ \dot{y}_2 = y_2, \end{cases}$$

które rozwiązujemy. Potem wstawiamy do x.

Jeśli mielibyśmy równanie $\dot{x} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix}$ należałoby także zapisać wektor $(c_1(t), c_2(t))$ w bazie $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$. Inaczej mówiąc zapisać:

$$(c_1(t), c_2(t)) = d_1(t)\varepsilon_1 + d_2(t)\varepsilon_2.$$

Równanie przyjęłoby postać:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 =& x_1 + x_2 + d_1(t) \\ \dot{x}_2 =& x_2 + d_2(t). \end{aligned}$$

Aby znaleźć współczynniki d_1, d_2 należy podziałać macierzą odwrotną do macierzy zmiany bazy na wektory c_1, c_2. Łatwo zauważyć, że jest to macierz $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.