Egzamin z Funkcji Analitycznych

Maciej Borodzik, Jakub Onufry Wojtaszczyk

15.01.2010. Czas pisania: 16:30–20:00.

Każde zadanie proszę pisać na osobnej kartce. W razie braku kartek proszę się zgłaszać. Przy tym papier należy szanować i starać się zmieścić rozwiązanie każdego zadania na jednej kartce A4

Uwaga! W czasie egzaminu można korzystać z każdego twierdzenia z wykładów i ćwiczeń, każdego znanego sensownego twierdzenia, poza wielkim twierdzeniem Montela oraz małym i wielkim twierdzeniem Picarda.

Zadanie 1. Oblicz całkę

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{(x^2 - 4x + 5)}\, dx.$$

Zadanie 2. Znajdź wszystkie wartości, które może przyjąć całka

$$\int_\gamma \frac{z+i}{(z^2+1)^3}$$

jeśli zakładamy, że γ może być dowolną krzywą zamkniętą kawałkami gładką, która nie przechodzi przez $\pm i$.

Zadanie 3. Ile rozwiązań równania

$$z^3 + 12z^2 + 1 = e^z$$

spełnia $|z| < 2$?

Zadanie 4. Ile pierwiastków o dodatniej części rzeczywistej ma wielomian $z^8 + z^5 + z^3 + 1$?

Zadanie 5. Niech

$$X = \{z \in \mathbb{C}\colon\ \operatorname{Re} z \cdot \operatorname{Im} z = 0\} \cup \{\infty\}.$$

Znajdź wszystkie homografie h takie, że $h(X) = X$.

Zadanie 6. Niech $\mathcal{F}$ będzie rodziną funkcji holomorficznych z $B(0,1) \to \mathbb{C}$, które nie przyjmują wartości z odcinka $[0,1]$. Czy to jest rodzina normalna? (Tzn. czy z każdego ciągu elementów da się wybrać podciąg, który będzie albo zbieżny niemal jednostajnie do funkcji holomorficznej, albo niemal jednostajnie rozbieżny do nieskończoności.)

Zadanie 7. Niech a_n będzie dowolnym ciągiem liczb zespolonych. Wykaż, że istnieje funkcja analityczna $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ taka, że $f(n) = a_n$ dla wszystkich $n = 1, 2, \ldots$.

Zadanie 8. Scharakteryzuj wszystkie funkcje holomorficzne $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ o tej własności, że $f(z) \in \mathbb{R}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $z \in \mathbb{R}$.

~~**Zadanie 9.** Niech $f : B(0,1) \to \mathbb{C}$ będzie holomorficzna. Przypuśćmy, że istnieje $w \in \mathbb{C}$, taki że $f^{-1}(w)$ składa się dokładnie z jednego elementu $z \in B(0,1)$ oraz $f'(z) \neq 0$. Wykaż, że f jest 1−1 na swój obraz oraz f' nie znika w żadnym punkcie $B(0,1)$.~~

Zadanie 9 jest zupełnie bez sensu. Przepraszamy!

Zadanie 10. Udowodnij, że wzór

$$\ln(\cos z)$$

definiuje funkcję analityczną $f(z)$ w otoczeniu $0 \in \mathbb{C}$. Dla rozwinięcia funkcji f w szereg potęgowy znajdź jego promień zbieżności.