WYKŁAD PIĄTY Z FUNKCJI ANALITYCZNYCH.

MACIEJ BORODZIK

Definicja 1. Niech X będzie przestrzenią topologiczną zaś (Y, ρ) przestrzenią metryczną (w najczęstszych naszych zastosowaniach $Y = \mathbb{C}$ zaś $X = \Omega \subset \mathbb{C}$). Ciąg funkcji $f_n : X \to Y$ zbiega *jednostajnie* do $f : X \to Y$ jeśli

$$\forall \varepsilon \, \exists N \colon \forall n > N \forall \mathbf{x} \in \mathbf{X} \;\; \rho(f(x), f_n(x)) < \varepsilon.$$

To była definicja w sensie, a raczej, w stylu, Heinego.

Możemy, naturalnie podać definicję ciągu Cauchy'ego funkcji: wtedy zbieżność Cauchy'ego będzie równoważna zbieżności w sensie Heinego pod warunkiem, że Y jest zupełna.

Definicja 2. Niech ponownie X będzie topologiczna, zaś Y metryczna. Powiemy, że ciąg funkcji $f_n : X \to Y$ zbiega *niemal jednostajnie* do f, jeśli dla każdego zbioru zwartego $K \subset X$, $f_n|_K$ zbiegają jednostajnie do $f|_K$.

Jeśli X sama jest zwarta, to zbieżność jednostajna jest równoważna zbieżności niemal jednostajnej.

Lemat 1. Niech X będzie przestrzenią topologiczną lokalnie zwartą, tzn. taką, że $\forall x \in X$ istnieje zbiór otwarty $U \ni x$ taki, że domknięcie U jest zbiorem zwartym. Niech $f_n : X \to Y$ będzie ciągiem funkcji *ciągłych* niemal jednostajnie zbieżnym do f. Wtedy f jest ciągła.

Dowód. Niech dla ustalonego x, U_x oznacza otoczenie x takie, że $\bar{U}_x$ jest zwarty. Z założenia $f_n|_{\bar{U_x}}$ zbiega jednostajnie do $f|_{\bar{U_x}}$ a więc f jest ciągła na $\bar{U}_x$. Stąd jest ciągła na X. □

Bogaci w te fakty udowodnimy następujące ważne twierdzenie.

Twierdzenie 1. Niech $\Omega \subset \mathbb{C}$ będzie zbiorem otwartym. Niech $f_n : \Omega \to \mathbb{C}$ będzie ciągiem funkcji *holomorficznych* zbieżnym niemal jednostajnie do $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Wtedy f jest holomorficzna oraz dla każdego k ciąg pochodnych $f_n^{(k)}$ zbiega niemal jednostajnie do $f^{(k)}$.

Dowód. **1.** Najpierw załóżmy, że $\Omega = B(z_0, R)$ jest kołem. Z Lematu 1 f jest ciągła. Pokażemy, że całka z f po każdym trójkącie wynosi 0.

Istotnie, niech $\Delta \subset \Omega$ będzie trójkątem. Wtedy, oczywiście Δ jest zwarty, a więc f_n zbiega jednostajnie do f na Δ. A więc

$$\int_{\partial\Delta} f_n \to \int_{\partial\Delta} f.$$

Ale lewa strona jest równa zero, bo f_n holomorficzna. Stąd całka po $\partial\Delta$ z f też jest zero. Na mocy tw. Morery, f jest holomorficzna.

2. Teraz wykażemy zbieżność ciągu $k-$tych pochodnych na kole $B(z_0, r)$ gdzie $r < R$. Niech $k > 0$. Połóżmy $r' = \frac{1}{2}(r + R)$, oraz $\delta = r' - r$. Ustalmy $\varepsilon > 0$. Ze zbieżności jednostajnej ciągu f_n na kuli domkniętej $B(z_0, r')$ wynika, że istnieje takie N, że dla każdego $n > N$ i dla każdego $w \in \partial B(z_0, r')$ mamy

$$|f_n(w) - f(w)| < \frac{\varepsilon}{r'k!\delta^{k+1}}. \tag{1}$$

Niech $\gamma = C(z_0, r')$, zaś $z \in B(z_0, r)$. Ze wzoru całkowego Cauchy'ego mamy

$$f_n^{(k)}(z) - f_n^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f_n(w) - f(w)}{(w - z)^{k+1}}dw.$$

Ale mamy

$$\left|\int_\gamma \frac{f_n(w) - f(w)}{(w - z)^{k+1}}dw\right| \leq l(\gamma) \sup_{w\in C(z_0,r')} \left|\frac{f_n(w) - f(w)}{(w - z)^{k+1}}\right|.$$

Teraz $l(\gamma) = 2\pi r'$, oraz $|w - z| > r' - r = \delta$. Stosując (1) dostajemy

$$|f_n^{(k)}(z) - f^{(k)}(z)| < \frac{k!}{2\pi} \cdot 2\pi \cdot \frac{\varepsilon}{r'k!\delta^{k+1}} \cdot \delta^{k+1} = \varepsilon.$$

To kończy dowód w przypadku, gdy Ω jest kołem.

3. Niech teraz Ω dowolny otwarty. Niech $z \in \Omega$ oraz r takie, że $B(z, r) \subset \Omega$. Wtedy na mocy **1.** f jest holomorficzna na $B(z, r)$. Wobec dowolności z jest holomorficzna w Ω.

4. Niech teraz K będzie zbiorem zwartym. Dla każdego $z \in K$ wybieramy taką kulkę $B_z = B(z, r_z)$, że $B(z, 2r_z)$ jeszcze siedzi w Ω. Z pokrycia K kulkami B_z wybieramy podpokrycie skończone $B_1, \dots, B_n$. Stosując drugą część (**2.**) dowodu dla $B(z,2r_z)$ dostajemy, że $f_n^{(k)}$ zbiega jednostajnie do $f^{(k)}$ na $B(z, r_z)$, czyli na każdej kulce B_i. Skoro tych kulek jest skończenie wiele, $f_n^{(k)}$ zbiegają jednostajnie na sumie kulek, w szczególności na K. □

Wniosek 1. Niech $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ będzie szeregiem zbieżnym dla $|z - z_0| < r$. Wtedy przedstawia on funkcję holomorficzną i można różniczkować wyraz po wyrazie.

Dowód. Wiadomo, że szereg zbieżny jest zbieżny niemal jednostajnie wewnątrz koła zbieżności. Stosujemy powyższe twierdzenie bez mrugnięcia okiem. □

Twierdzenie 2 (Zasada identyczności)**.** Niech $\Omega \subset \mathbb{C}$ będzie zbiorem otwartym i **spójnym**, zaś $h : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorficzna. Wtedy albo h nie zeruje się na zbiorze mającym punkt skupienia w Ω, albo h tożsamościowo jest równa 0.

Dowód. Wykażemy następujący lemat

Lemat 2. Niech h jak wyżej a $a \in \Omega$ taki, że $h(a) = 0$. Wtedy albo istnieje takie $r > 0$, że h nie zeruje się na $B(a, r) \setminus \{a\}$, albo $h \equiv 0$ w otoczeniu a.

Dowód lematu. Skoro h jest holomorficzna, zapisuje się w szereg potęgowy w otoczeniu a.

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n.$$

Mamy dwie możliwości. Albo $\forall n$, $c_n = 0$ i wtedy $h \equiv 0$ w pewnym otoczeniu a, albo istnieje taki m, że $c_0 = \cdots = c_{m-1} = 0 \neq c_m$. Pokażemy, że wtedy h jest różne od zera w pewnym otoczeniu punktu a. Niech

$$g(z) = c_m + \sum_{n=1}^{\infty} c_{m+n} (z - a)^n.$$

Naturalnie $h(z) = (z - a)^m g(z)$ oraz $g(a) = c_m \neq 0$. Z ciągłości g, g nie zeruje się w pewnym otoczeniu a. A zatem h ma zero izolowane w a. □

Dokończenie dowodu twierdzenia. Niech A będzie zbiorem zer funkcji h. Niech $B = A' \cup \Omega$ będzie zbiorem punktów skupienia A (tzn. zbiorem granic niestałych ciągów z A), zawartych w Ω. Jeśli B jest pusty, twierdzenie jest załatwione: A nie ma punktów skupienia w Ω. Załóżmy więc, że B zawiera jakiś element.

B jest zbiorem domkniętym w Ω z definicji. Ponadto B jest niepusty. Pokażemy, że B jest otwarty. Istotnie, niech $b \in B$. Wtedy z Lematu 2, $h \equiv 0$ w pewnym otoczneniu $U \ni b$ (w przeciwnym wypadku b byłby zerem izolowanym). A więc $U \subset A$ oraz $U \subset B$. Czyli B otwarty.

Ze spójności Ω wnioskujemy, że $B = \Omega$. Oczywiście $B \subset A$, bo jeśli $h(z_n) = 0$ i $z_n \to z$, to $h(z) = 0$. Czyli $A = \Omega$, więc $h \equiv 0$ na Ω. □