Twierdzenie Rungego.

spisał: Maciej Borodzik

Twierdzenie 1. *Niech Ω będzie podzbiorem otwartym $\mathbb{C}$, zaś S zbiorem mającym dokładnie po jednym punkcie wspólnym z każdą składową spójną $S^2 \setminus \Omega$. Wtedy dla każdej funkcji holomorficznej $f : \Omega \to \mathbb{C}$ istnieje ciąg funkcji wymiernych f_n, niemających biegunów poza S, taki że $f_n \to f$ niemal jednostajnie na Ω.*

Dowód. Dowód przeprowadzimy w kilku krokach. Pierwszym krokiem jest przygotowanie topologiczne (na wykładzie był to krok ostatni).

Krok 1. Wypełnienie Ω odpowiednimi zbiorami zwartymi.

Lemat 2. *Niech $\Omega \subset \mathbb{C}$ otwarty. Wówczas istnieje rodzina K_n zwartych podzbiorów Ω taka, że:*

(a) $\dots \subset K_n \subset K_{n+1} \subset \dots$ *oraz* $\bigcup K_n = \Omega$*; (zbiory K_n wypełniają Ω)*

(b) *dla każdego zbioru zwartego $K \subset \Omega$ istnieje takie n, że $K \subset K_n$; (dowolny podzbiór zwarty w Ω mieści się w pewnym podzbiorze K_n)*

(c) *Niech U będzie pewną składową spójną zbioru $S^2 \setminus K_n$. Wtedy U zawiera co najmniej jeden punkt z $S^2 \setminus \Omega$. (zbiór K_n nie ma dodatkowych dziur)*

Dowód Lematu 2. Niech

$$V_n = \bigcup_{a \in \mathbb{C}\setminus\Omega} B(a, \frac{1}{n}) \cup \{z \in \mathbb{C} \colon |z| > n\}.$$

Wtedy V_n jest otwarty, $\Omega \subset V_n$, a jego dopełnienie zawiera się w zbiorze $B(0, n)$. Stąd

$$K_n = \mathbb{C} \setminus V_n$$

jest zwartym podzbiorem Ω. W oczywisty sposób mamy $K_n \subset K_{n+1}$. Ponadto $\bigcup K_n = \Omega$. Istotnie, przecięcie wszystkich zbiorów V_n to z definicji zbiór $\mathbb{C} \setminus \Omega$. Czyli punkt (a) mamy załatwiony.

Co do punktu (b), przypuśćmy, że zbiór K jest zwarty i zawarty w $B(0, N)$ dla pewnego N (takie N musi istnieć, bo K ograniczony). Przypuśćmy też, że $\operatorname{dist}(K, \mathbb{C} \setminus \Omega) > \frac{1}{N}$ (odległość zbioru zwartego i domkniętego jest zawsze dodatnia, jeśli te zbiory są rozłączne). Wtedy, z konstrukcji wynika, że $K \subset K_N$.

Przypuśćmy teraz, że W jest pewną składową spójną zbioru $S^2 \setminus K$. Wtedy W jest składową spójną zbioru $V_n' = V_n \cup \infty$ (bo $V_n' = S^2 \setminus K_n$). Jeśli $z \in S$, to albo $z \in B(a, \frac{1}{n})$ dla $a \in \mathbb{C} \setminus \Omega$, albo $|z| > n$. W pierwszym przypadku a i z leżą w tej samej składowej spójności W, więc $a \in S$. Jeśli zaś $|z| > n$, to z leży w tej samej składowej spójnej V_n, co punkt ∞, czyli $\{\infty\} \in W$. $\square$

Z Lematu 2 wystarczy pokazać, że dla każdej funkcji holomorficznej $f : \Omega \to \mathbb{C}$, dowolnego $n \in \mathbb{N}$ i dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje funkcja g, wymierna, holomorficzna w $S^2 \setminus S$ taka, że

$$\forall z \in K_n, \ \ |f(z) - g(z)| < \varepsilon.$$

Krok 2. Przybliżanie na K_n funkcjami o biegunach poza K_n.
Ustalmy teraz raz na zawsze (?) funkcję f i zbiór K_n, który (żeby oszczędzać indeks n) oznaczać będziemy dalej przez K. Niech Γ będzie cyklem zasługującym na jakąś ładną nazwę w $\Omega \setminus K$ o takich własnościach, że

(a) $\forall z \in K \ \mathrm{ind}_\Gamma z = 1$;
(b) $\forall w \in \mathbb{C} \setminus \Omega$, $\mathrm{ind}_\Gamma w = 0$.

Ze wzoru całkowego Cauchy'ego wnioskujemy, że dla $z \in K$ mamy

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(w)}{w - z} dw.$$

Niech $\Gamma = \gamma_1 + \cdots + \gamma_N$, przy czym $\gamma_j : [0, 1] \to \mathbb{C}$ są krzywymi zamkniętymi. Założymy dodatkowo, że γ_j są klasy C^2. Wtedy

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^{N} \int_0^1 \frac{f(\gamma_j(t))}{\gamma_j(t) - z} \gamma_j'(t)\, dt. \tag{1}$$

Przypatrzmy się pojedynczej całce w sumie po prawej stronie (1). Mamy

(2)
$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{f(\gamma_j(t))}{\gamma_j(t) - z} \gamma_j'(t)\, dt &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{f(\gamma_j(k/n))}{\gamma_j(k/n) - z} \gamma_j'(k/n) \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\left(\frac{1}{n} f(\gamma_k(k/n))\gamma_j'(k/n)\right)}_{c_{k,n,j}} \frac{1}{\gamma_j(k/n) - z}.\end{aligned}$$

W ten sposób zapisujemy wartość $f(z)$ jako granicę funkcji postaci $\sum c_{k,n,j} \frac{1}{\gamma_j(k/n) - z}$. Zauważmy, że funkcje te wszystkie są wymierne i mają bieguny w punktach postaci $\gamma_j(k/n)$, czyli, ogólnie w punktach Γ^*. Przypominamy tutaj, że Γ^* to jest teoriomnogościowy obraz Γ w $\mathbb{C}$.

Pokażemy teraz, że granica w (2) jest jednostajna po $z \in K$. W tym celu użyjemy ogólnego lematu, który sformułujemy w tendencyjny sposób.

Lemat 3. *Niech Y będzie podzbiorem otwartym $\mathbb{R}^n$ (dla ludzi o mocnych nerwach: dowolnej przestrzeni topologicznej) oraz $f : [0, 1] \times Y \to V$ (V może być $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ lub dowolną przestrzenią Banacha) różniczkowalna po pierwszej zmiennej, przy czym $|f_t'(t, y)| < M$ dla wszystkich*

$t \in [0,1]$ i $y \in Y$ (dla ludzi o bardzo mocnych nerwach: nie zakładamy ciągłości po Y). Wtedy

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(k/n, y) \rightrightarrows \int_0^1 f(t,y)dt$$

jednostajnie po Y.

Dowód. Mamy

$$\int_0^1 f(t,y) = \sum_{k=1}^{n} \int_{(k-1)/n}^{k/n} f(t,y)\, dt. \tag{3}$$

oraz

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(k/n, y) = \sum_{k=1}^{n} \int_{(k-1)/n}^{k/n} f(k/n,y)\, dt. \tag{4}$$

Odejmując prawe strony (3) i (4) otrzymujemy

$$\sum_{k=1}^{n} \int_{(k-1)/n}^{k/n} (f(t,y) - f(k/n,y))\, dt.$$

Ale teraz dla $t \in ((k-1)/n, k/n)$ mamy

$$|f(t,y) - f(k/n,y)| \leq M|t - k/n|$$

na mocy twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej i ograniczoności pochodnej f po t. Stąd

$$\left|\int_{(k-1)/n}^{k/n} (f(t,y) - f(k/n,y))\, dt\right| \leq M \int_{(k-1)/n}^{k/n} |t - k/n|\, dt = \frac{M}{2n^2}.$$

A więc

$$\left|\int_0^1 f(t,y) - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(k/n,y)\right| \leq \frac{M}{2n}.$$

Czyli dowód jest zakończony. □

Teraz zauważmy, że funkcja

$$t \to \frac{f(\gamma_j(t))}{\gamma_j(t) - z}\gamma_j'(t)$$

ma ograniczoną pochodną po t, gdy $z \in K$. Istotnie, jedyny czynnik, który może budzić tu wątpliwości to $\frac{1}{\gamma_j(t)-z}$. Ale $\mathrm{dist}(\Gamma^*, K) = d > 0$ (znowu, K zwarty, Γ domknięty), więc wielkość $\frac{1}{\gamma_j(t)-z}$ jest oddzielona od nieskończoności.

A więc potrafimy już funkcję f przybliżać na K jednostajnie zbieżnym ciągiem funkcji wymiernych, mających bieguny poza K.

Krok 3. Przybliżanie funkcji postaci $\frac{1}{\lambda - z}$ funkcjami o biegunach w S, gdy $\lambda \notin K$.

Niech $U = \{\lambda \in \mathbb{C} :$ funkcję $1/(z-\lambda)$ można przybliżać jednostajnie na K funkcjami o biegunach w $S\}$. Pokażemy, że $U = S^2 \backslash K$. Oczywiście mamy

(a) $U \cap K = \emptyset$ (bo $1/(z-\lambda)$ nie jest nawet holomorficzna na K, gdy $\lambda \in K$);

(b) $S \in U$.

Lemat 4. *Niech* $w \in U$, *oraz* $\operatorname{dist}(w, K) = d$. *Wtedy* $B(w, d) \subset U$.

Dowód. Oczywiście $d > 0$, bo jeśli $d = 0$, to $\operatorname{dist}(w, K) = 0$ i ze zwartości K, $w \in K$. Niech teraz $u \in B(w, d)$, czyli $|u - w| < d$. Napiszmy

$$\frac{1}{z-u} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(u-w)^k}{(z-w)^{k+1}},$$

przy czym szereg po lewej stronie jest zbieżny jednostajnie po K. Filozoficzne znaczenie powyższej równości jest takie, że jeśli umiemy przybliżać funkcję $1/(z-w)$, to umiemy też przybliżać $1/(z-w)^k$ oraz umiemy przybliżać $1/(z-u)$. Ściślej, niech g_k będzie ciągiem funkcji o biegunach w S takim, że

$$|g_k(z) - \frac{1}{z-w}| < \frac{d^k}{k} \varepsilon^k, \tag{5}$$

dla wszystkich $z \in K$. Wtedy $|g_k(z) - \frac{1}{(z-w)^k}| < \varepsilon^k$. Niech

$$h(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (u-w)^k g_{k+1}(z).$$

Z nierówności (5) oraz z faktu, że $|z-w| \geq d$, wnioskujemy, że $|g_k(z)| \leq \varepsilon^k + 1/d^k$ dla $z \in K$. Jeśli ε dostatecznie mały, szereg definiujący h jest zbieżny jednostajnie po K. Ponadto

$$|h(z) - 1/(z-u)| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |u-w|^k \varepsilon^{k+1}.$$

Czyli $h(z)$ dobrze przybliża $1/(z-u)$. □

Z Lematu 4 wynikają od razu dwie rzeczy. Po pierwsze zbiór U jest otwarty. Po drugie, brzeg zbioru U siedzi w K. Istotnie, przypuśćmy, że $u \in \partial U$. To oznacza, że istnieje ciąg $w_n \in U$ taki, że $|w_n - u| \to 0$. Jeśli $\operatorname{dist}(u, K) = d > 0$, to dla dostatecznie dużego n mamy $|u - w_n| < d/2$ i $|\operatorname{dist}(w_n, K)| > d/2$. Ale wtedy na mocy lematu $u \in U$.

Z tego wynika, że domknięcie zbioru U leży poza $V = \mathbb{C} \setminus K$. Czyli $U \subset V$ jest otwarty i domknięty. Gdyby V był spójny, byłby koniec, dostalibyśmy $U = V$, ale musimy jeszcze gdzieś wykorzystać fakt, że U zawiera po każdej składowej zbioru $S^2 \setminus \Omega$ (dyskusja punktu ∞ została celowo wyłączona z naszych rozważań).

No więc przypuśćmy, że $V \setminus U$ jest niepuste. Niech A będzie składową zbioru $V \setminus U$. Skoro tak, to z Lematu 2, punkt (c), zbiór A zawiera co najmniej jeden element $a \in \mathbb{C} \setminus \Omega$. Niech B będzie składową spójną $\mathbb{C} \setminus \Omega$ zawierającą a. Wtedy, jako, że $\mathbb{C} \setminus \Omega \subset V = \mathbb{C} \setminus K$ (bo $K \in \Omega$), $B \subset V$, a więc, ze spójności B, $B \subset A$. Ale teraz B zawiera element ze zbioru S, czyli $B \cap S \neq \emptyset$. Stąd $A \cap S \neq \emptyset$. Ale $S \in U$, czyli $A \cap U \neq \emptyset$. To oczywiście przeczy temu, że $A \subset V \setminus U$. Czyli $U = V$.

Przypominamy, że U to był zbiór tych punktów λ z $\mathbb{C} \setminus K$ takich, że funkcje $1/(z-\lambda)$ można przybliżać funkcjami wymiernymi o biegunach w S. To kończy ostatni krok w dowodzie. $\square$