ZADANIA ZA JEDEN PUNKT

MACIEJ BORODZIK

Zadanie 1. Niech $\gamma : S^1 \to \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ będzie zorientowaną krzywą gładką (można założyć dowolną klasę gładkości). Niech teraz l będzie dowolną półprostą transwersalną (tzn. nie styczną) do $\gamma(S^1)$. l przecina $\gamma(S^1)$ w skończenie wielu punktach $z_1, \dots, z_n$. Każdemu z tych punktów przypisujemy liczbę ε_j równą ± 1 zależnie od tego, czy krzywa γ przecina półprostą z prawa na lewo (wtedy $+1$), lub z lewa na prawo (wtedy -1). Wykaż, że wyrażenie

$$\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j$$

nie zależy od wyboru półprostej.

Zadanie 2 (Uogólnienie)**.** Niech M będzie gładką zorientowaną zwartą rozmaitością n wymiarową w $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ bez brzegu. Ustalmy również orientację $\mathbb{R}^{n+1}$. Niech l będzie dowolną półprostą wychodzącą z zera (wychodzącą oznacza również wybór orientacji), która przecina M niestycznie w punktach $x_1, \dots, x_m$. Każdemu punktowi x_j przypisujemy liczbę ε_j równą $+1$, jeśli orientacja $T_{x_j} l \oplus T_{x_j} M$ zgadza się z orientacją $T_{x_j} \mathbb{R}^{n+1}$, -1 przeciwnie. Wykaż, że wyrażenie

$$\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j$$

nie zależy od wyboru półprostej l oraz jest równe klasie M w $H_n(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) = \mathbb{Z}$.

Zadanie 3. Niech $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \dots$ będą rzeczywistymi dodatnimi pierwiastkami równania $x = \operatorname{tg} x$. Wykaż, że

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j^2} = \frac{1}{10}.$$

Zadanie 4. Niech $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ będzie podzbiorem otwartym zadanym przez $\{z \colon F(z) < 0\}$, gdzie $F \colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ spełnia warunek

$$\forall z = (z_1, \dots, z_n) \subset \mathbb{C}^n \, \forall w \in \mathbb{C}^n \quad \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 F}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} w_i \bar{w}_k \geq 0.$$

Wykaż, że $\forall j > n$ zachodzi $H^j(\Omega) > 0$.

Uwaga! Zbiory typu Ω nazywają się pseudowypukłe. Są jednymi z podstawowych pojęć analizy wielu zmiennych zespolonych.

Zadanie 5. Niech $\Omega \subset \mathbb{C}$ będzie obszarem z jedną dziurą (tzn. $\pi_1(\Omega) = H_1(\Omega) = \mathbb{Z}$). Wykaż, że istnieje dokładnie jedno $r < 1$ takie, że Ω jest biholomorficznie równoważny ze zbiorem

$$\{z \in \mathbb{C} \colon r < |z| < 1.\}$$

Zadanie 6. Niech Σ_1 i Σ_2 będą rozmaitościami zespolonymi zadanymi przez

$$\Sigma_1 = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \colon y^2 = x(x-1)(x-2)\}$$
$$\Sigma_2 = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \colon y^2 = x(x-1)(x-3)\}$$

Wykaż, że Σ_1 i Σ_2 są dyfeomorficzne, ale nie są holomorficznie równoważne. Dodatkowe pół punktu jest do rozdzielenia między osoby, które sformułują udowodnią warunek, kiedy dwie rozmaitości zadane przez $y^2 = x(x-a)(x-b)$ są holomorficznie równoważne.

Zadanie 7. Niech $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ będzie obszarem ograniczonym takim, że $0 \in \Omega$. Załóżmy, że $F \colon \Omega \to \Omega$ jest automorfizmem zespolonym takim, że $F(0) = 0$. Przypuśćmy ponadto, że $F'(0) = Id$. Wykaż, że F jest identycznością.

Zadanie 8. Znajdź wszystkie automorfizmy zespolone kuli $B^n = \{z = (z_1, \dots, z_n) \colon \sum |z_j|^2 < 1\}$. Wskazówka: można użyć poprzedniego zadania.

Zadanie 9. Niech $p \in (0,1)$, zaś $a < b < c < d \in \mathbb{R}$. Określamy $f(x) = (x-a)^p(x-b)^{1-p}(x-c)^p(x-d)^{1-p}$. Wykaż, że

$$\int_a^b \frac{1}{f(x)}dx = \int_c^d \frac{1}{f(x)}dx.$$

Dodatkowe pół punktu jest do rozdzielenia między autorów eleganckich zadań mieszczących się na pół strony.

Zadanie 10. Wykaż, że dla dowolnego $n > 1$ całkowitego, itnieje takie $a \in \mathbb{C}$, że ciąg 'przybliżeń pierwiastka z a' zdefiniowany przez

$$\begin{cases} x_0 & = a \\ x_{n+1} & = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{1}{x_n}\right) \end{cases}$$

jest okresowy o minimalnym okresie równym n (słowo 'minimalnym' jest dodane po to, żeby nie było nieporozumień, w stylu ciąg stały ma okres n, więc zadanie jest rozwiązane).