Kolokwium z Funkcji Analitycznych

14. XII. 2009. Czas pisania. 16:15 — 18:30.

Z 5. zadań należy wybrać 4 i rozwiązać. W przypadku rozwiązania pięciu, należy *wyraźnie* wskazać, które z zadań mają być sprawdzane. W przeciwnym wypadku ocenione będą pierwsze cztery.

1. Zadania

Zadanie 1. Oblicz całkę

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2-2x+5)^2}\,dx.$$

Zadanie 2. Dany jest wielomian $P(z) = z^9 + z^8 + 6z^5 + 2z + 1$. Znajdź liczbę pierwiastków P

(a) W kole $B(0,1)$;
(b) w lewej, górnej ćwiartce $\{z : \operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z > 0\}$.

Zadanie 3. Wyznacz wszystkie funkcje holomorficzne $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ takie, że $f(f(z)) = z^2$.

Zadanie 4. Niech $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ i f będą funkcjami holomorficznymi na $B(0,1)$, przy czym f_n zbiegają niemal jednostajnie do f.

Przypuśćmy, że funkcje f_n nigdzie nie znikają $(\forall n, \forall z, f_n(z) \neq 0)$. Wykaż, że albo $f \equiv 0$, albo f też nigdzie nie znika.

Zadanie 5. Oblicz sumę szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^4+1}.$$

Wskazówka: rozważ funkcję postaci $f(z)/\sin \pi z$.

2. Rozwiązania

Rozwiązanie 1. Niech $f(z) = \frac{e^{iz}}{(z^2-2z+5)^2}$. Wtedy, dla $z \in \mathbb{R}$ mamy

$$\operatorname{Re} f(z) = \frac{\cos z}{(z^2-2z+5)^2}.$$

Ustalmy $R > 0$. Będziemy całkować funkcję $f(z)$ po krzywej $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$, gdzie $\gamma_1 = [-R, R]$, zaś $\gamma_2 = \{Re^{it} \colon t \in [0,\pi]\}$.

Po pierwsze, zauważmy, że dla $z \in \gamma_2$, $\operatorname{Im} z \geq 0$, stąd $|e^{iz}| \leq 1$, a więc $|f(z)| \leq \frac{1}{|z|^4-1}$. Z tego wynika, że

$$\sup\{|f(z)| \colon z \in \gamma_2\} = \frac{1}{R^4+1}.$$

W związku z tym, jako że długość γ_2 wynosi πR mamy

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_2} f(z) = 0.$$

Gdybyśmy wzięli w liczniku $\cos z$*, a nie* e^{iz}*, nie dałoby się uzyskać tego oszacowania.*

Z drugiej strony w zbiorze ograniczonym przez krzywe γ_1 i γ_2, f ma biegun rzędu 2 w punkcie $z_0 = 1 + 2i$. W związku z tym, na mocy twierdzenia o residuach.

$$\int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f = 2\pi i \operatorname{res}_{z_0} f.$$

Wiadomo, że dla bieguna rzędu 2 zachodzi wzór

$$\operatorname{res}_{z_0} f = \lim_{z \to z_0} \left[(z - z_0)^2 f(z)\right]' = g'(z_0),$$

gdy

$$g(z) = \frac{e^{iz}}{(z - 1 + 2i)^2}.$$

Łatwo policzyć, że

$$g'(z) = \frac{ie^{iz}(z - 1 + 2i)^2 - 2e^{iz}(z - 1 + 2i)}{(z - 1 + 2i)^4},$$

a więc

$$g'(z_0) = -\frac{3}{32} i e^{i(1-2i)}.$$

Przechodząc z $R \to \infty$ otrzymujemy, że

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(z)dz = 2\pi i g'(z_0) = \frac{3\pi}{16e^2} e^i.$$

Biorąc część rzeczywistą uzyskujemy

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2 - 2x + 5)} dx = \frac{3\pi \cos 1}{16e^3}.$$

Rozwiązanie 2. Część (a). Niech $f(z) = 6z^5$, $g(z) = z^9 + z^8 + 2z + 1$. Gdy $|z| = 1$, to $|f| = 6$, zaś $|g| < 1 + 1 + 2 + 1 = 5$. Stąd f i $f + g$ mają tyle samo pierwiastków w kole, czyli 5.

Część (b). Niech R dostatecznie duże, $\gamma_1 = [0, R]$, $\gamma_2 = \{Re^{it} : t \in [0, \pi/2]\}$, $\gamma_3 = [iR, 0]$. Będziemy szacować przyrost argumentu na krzywych γ_1, γ_2 i γ_3.

Na γ_1 przyrost jest zero, bo $f(z)$ jest rzeczywista dodatnia dla $z \in \mathbb{R}^+$.

Na γ_2 przyrost wynosi prawie tyle co przyrost dla z^9 (wiodący wyraz, bierzemy b. duże R), czyli $9 \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{4} = \frac{9}{2}\pi$.

Dla $z \in \gamma_3$ mamy $\operatorname{Re} f(z) > 0$ oraz $\operatorname{Im} f(z) > 0$. Dla $z = iR$ argument wynosi $\frac{1}{2}i$, dla $z = 0$ wynosi 0. Różnica argumentów wynosi $-\frac{1}{2}\pi$ (szkic ścisłego argumentu: skoro $f(z)$ wpada w pierwszą ćwiartkę, $\ln f(z)$ jest dobrze określony).

Całkowity przyrost argumentu wynosi

$$\frac{9}{2}\pi + 0\pi + \left(-\frac{1}{2}\pi\right) = 4\pi = 2 \cdot 2\pi.$$

Z zasady argumentu mamy 2 pierwiastki.

Rozwiązanie 3. Pokażemy, że nie ma takich funkcji.

Jeśli f byłoby wielomianem, to $f = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0$, z $a_n \neq 0$. Wtedy $f(f(z))$ ma wyraz wiodący $a_n^n z^{n^2}$, a więc stopień musi być kwadratem. Jako, że $\sqrt{2} \notin \mathbb{Z}$, otrzymujemy sprzeczność.

Przypuśćmy zatem, że $f(z)$ nie jest wielomianem. W związku z tym ma osobliwość istotną w nieskończoności, czyli istnieje $z_n \to \infty$ taki, że $u_n = f(z_n) \to 0$. Ale wtedy $f(u_n) = z_n^2 \to \infty$. Przeczy to ograniczoności f w zerze.

Uwaga! Gdyby f nie miała być z $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, ale z mniejszego obszaru Ω, można by rozpatrywać funkcję $f(z) = z^{\sqrt{2}}$. Przy pewnych założeniach (jednospójność, $f(\Omega) \subset \Omega$), mogłoby dać się skonstruować taką funkcję.

Rozwiązanie 4. Naturalnie f jest holomorficzna. Ustalmy z_0. Jeśli dla dowolnego $r < 1 - |z_0|$ mamy

$$\inf\{|f(z)|\colon |z - z_0| = r\} = 0,$$

to ze zwartośc okręgu $C(z_0, r)$ istnieje takie $z_r \in C(z_0, r)$, że $f(z_r) = 0$. Ale wtedy f zeruje się na zbiorze mającym punkt skupienia (np. z_0 jest punktem skupienia), zatem $f \equiv 0$.

W związku z tym, jeśli f nie jest stale równa zero, istnieje takie $r < 1 - |z_0|$, że

$$\inf\{|f(z)|\colon |z - z_0| = r\} = d > 0.$$

Z drugiej strony, ze zwartości okręgu wnioskujemy, że f_n dążą do f jednostajnie po $C(z_0, r)$. W szczególności dla dostatecznie dużego n i $|z - z_0| = r$ mamy

$$|f_n(z) - f(z)| < d.$$

Z twierdzenia Rouché dla funkcji f i $f_n - f$ wynika, że $f + f_n - f$ ma tyle samo pierwiastków w $B(z_0, r)$, co f. Ale f_n nie ma pierwiastków w $B(z_0, r)$ z założenia. Czyli f też nie może mieć.

Uwaga! Podobieństwo tego zadania do jednego z podpunktów dowodu twierdzenia Riemanna o obszarach jednospójnych, który pojawił się 2 godziny wcześniej na wykładzie było niezamierzone. Smutne tylko, że zaledwie 2 osoby (poza wykładowcą) były w stanie to podobieństwo zauważyć.

Rozwiązanie 5. Państwo wybaczą, ale nie chce mi się wklepywać rozwiązania. Podam wskazówkę. Należy rozważyć kwadrat Q_N o wierzchołkach $(\pm 1 \pm i)(N + 1/2)$ i całkować funkcję

$$g(z) = \frac{1}{(z^4 + 1) \sin \pi z}$$

po ∂Q_N. Potrzebne szacowanie $\int_{\partial Q_N} g(z) \to 0$ uzyskujemy z szacowania dla $z = x + iy$:

$$|\sin z|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y,$$

które było na ćwiczeniach. W szczególności dla $\operatorname{Im} z > \delta$ mamy $|\frac{1}{\sin z}| < \frac{1}{\delta}$.

Odpowiedź: zobacz Krzyż, 4.6.8(iii).