Kolokwium z Funkcji Analitycznych

14.XII.2007.

Zadanie 1 (10pt)**.** Oblicz **jedną** z dwóch wybranych przez Ciebie całek

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ix}}{x^6+4x^4+3x^2+2}dx,$$

lub

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^3 x}{x^3(x^2+1)dx}.$$

Uwaga. W przypadku rozwiązania dwóch całek należy *wyraźnie* zaznaczyć, która ma być oceniana.

Uwaga 2. Funkcja sinus nie jest ograniczona ani w górnej, ani w dolnej półpłaszczyźnie.

Zadanie 2 (10pt)**.** Dany jest wielomian $P(z) = z^4 - 6z^2 - 8z - \frac{1}{2}$. Zbadaj ilość rozwiązań równania $P(z) = 0$ w zbiorach

- $|z| < 1$
- $|z-1| < 1$
- $|z-2| < \frac{1}{2}$

Zadanie 3 (10pkt+2)**.** Niech S^1 będzie brzegiem koła o promieniu 1. Niech $h : S^1 \to S^1$ będzie funkcją zadaną wzorem $h(e^{i\phi}) = e^{-i\phi}$. Wykaż, że nie istnieje funkcja $f : B(0,1) \to \mathbb{C}$, holomorficzna wewnątrz koła i ciągła na domknięciu taka, że $f|_{S^1} = h$.

Dodatkowe dwa punkty można dostać za podanie dwóch, istotnie różnych dowodów.

Zadanie 4 (10pkt)**.** Niech v i w będą dwoma liczbami zespolonymi liniowo niezależnymi nad $\mathbb{R}$. Określamy funkcję

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\substack{k,l\in\mathbb{Z} \\ (k,l)\neq(0,0)}} \left(\frac{1}{(z-kv-lw)^2} - \frac{1}{(kv+lw)^2} \right).$$

2pkt: Wykaż, że szereg definiujący sumę jest niemal jednostajnie zbieżny dla z znajdującym się poza zbiorem $\Gamma = \{kv+lw\colon k,l \in \mathbb{Z}\}$ (ta część jest najbardziej czasochłonna, więc daję za nią mało punktów, żeby nie tracić czasu).

1pkt: Wykaż, że $\wp(z)$ jest meromorficzna i ma bieguny tylko w punktach z Γ.

1pkt: Oblicz residua $\wp(z_0)$ dla $z_0 \in \Gamma$.

2pkt: Wykaż, że $\wp(z+v) = \wp(z+w) = \wp(z)$, czyli funkcja $\wp$ jest dwuokresowa.

3pkt: Udowodnij, że istnieją takie stałe c_1, c_2 i c_3, że dla wszystkich punktów $z \in \mathbb{C}$ zachodzi

$$\wp'(z)^2 - 4\wp(z)^3 - c_1\wp(z)^2 - c_2\wp(z) \equiv c_3.$$

1pkt: Uzasadnij, że funkcja $\wp$ przeprowadza torus z wykłutym punktem na zbiór zer wielomianu $y^2 - 4x^3 - c_1x^2 - c_2x - c_3$ w $\mathbb{C}^2$.

Podpunkty można rozwiązywać niezależnie i można powoływać się na poprzedni podpunkt, nawet, jeśli się go nie rozwiązało.