Zestaw zadań z Funkcji Analitycznych.

Termin oddania: 23 stycznia 2008 środa!

Maciej Borodzik

Zadanie 1. Scharakteryzuj wszystkie odwzorowania $f : B(0,1) \to B(0,1)$ holomorficzne we wnętrzu i ciągłe na brzegu takie, że $f(f(z)) = z$.

Zadanie zainspirowane jednym z rozwiązań zadania 3 na kolokwium.

Zadanie 2. Niech H będzie przestrzenią funkcji holomorficznych na $B(0,1) = \{|z| < 1\}$ z topologią zbieżności niemal jednostajnej.

- Wykaż, że H jest zupełna.
- Niech U będzie dowolnym, niepustym, zbiorem otwartym w $\mathbb{C}$. Określamy
$$V_U = \{f \in H\colon\ \forall r : |r| = 1, f([0,r)) \cap U \neq \emptyset, \}$$
czyli takie funkcje z H, że obraz każdego promienia przecina U. Udowodnij, że V_U jest zbiorem otwartym.
- Korzystając z twierdzenia Rungego wykaż, że V_U jest zbiorem gęstym.
- Wywnioskuj, że istnieje funkcja holomorficzna na $B(0,1)$ taka, że obraz każdego promienia jest gęsty w $\mathbb{C}$.

Zadanie 3. Rozpatrując całkę z funkcji $\frac{1}{z - z^2 \operatorname{ctg} z}$ po odpowiednich konturach, wykaż, że
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} = \frac{1}{10},$$
gdzie λ_n jest jedynym pierwiastkiem równania $z = \operatorname{tg} z$ zawartym w przedziale $\big(n\pi, (n + \frac{1}{2})\pi\big)$.

Zadanie 4. Niech dane będą pierścienie $A_1 = \{r_1 < |z| < R_1\}$ i $A_2 = \{r_2 < |z| < R_2\}$. Przypuśćmy, że f jest holomorficznym przekształceniem A_1 na A_2.

- Powołując się na stosowne twierdzenie wykaż, że f przedłuża się na brzeg A_1.
- Z zasady symetrii Schwartza wykaż, że f można przedłużyć do odwzorowania z $B(0,R_1)$ do $B(0,R_2)$ takiego, że $f(0) = 0$.
- Wykaż, że wtedy $r_1/R_1 = r_2/R_2$.

To pokazuje, że pierścienie o różnych ilorazach nie są konforemnie równoważne.

Zadanie 5. Dla $a \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ oblicz całkę
$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 3\phi}{1 - 2a\cos\phi + a^2} d\phi.$$
Wskazówka: Podstaw $z = e^{i\phi}$.

Zadanie 6. Oblicz całkę
$$\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}(x+1)^2} dx.$$