# Zestaw zadań z Funkcji Analitycznych. Okolice twierdzenia Rouché.

*Termin oddania: 4 stycznia 2008*

Maciej Borodzik

**Zadanie 1.** Pokazać, że jeśli $\rho < 1$, to dla dostatecznie dużych $n$ wielomian

$$P_n(z) = 1 + 2z + 3z^2 + \cdots + nz^{n-1}$$

nie ma zer w zbiorze $|z| < \rho$.

**Zadanie 2.** Wyprowadź wzór

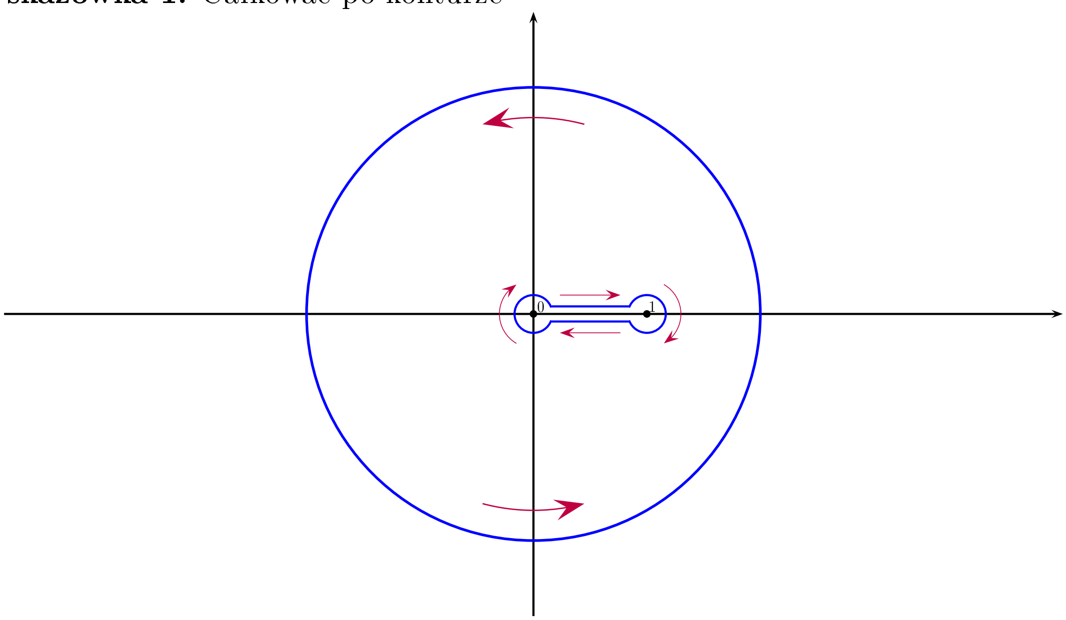
$$\cosh z - \cos z = z^2 \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z^4}{4n^4\pi^4}\right).$$

**Zadanie 3.** Obliczyć całkę

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1}(1-x)^{-p}}{(1+x)^3},$$

gdzie $-1 < p < 2$.

**Wskazówka 1.** Całkować po konturze




gdzie promień dużego okręgu ucieka do nieskończoności.

**Zadanie 4.** Rozłóż funkcję $\operatorname{tg} z$ na ułamki proste.

**Zadanie 5.** Wykaż, że wzór

$$z \to \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(z+n)} + \int_1^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \tag{1}$$

zadaje przedłużenie analityczne funkcji $\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$. Na jakim zbiorze to przedłużenie analityczne jest określone? Udowodnij, że tak rozszerzona funkcja $\Gamma$ nadal spełnia równanie $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ dla wszystkich tych $z$, dla których to ma sens.