Zestaw zadań z Funkcji Analitycznych. Residua.

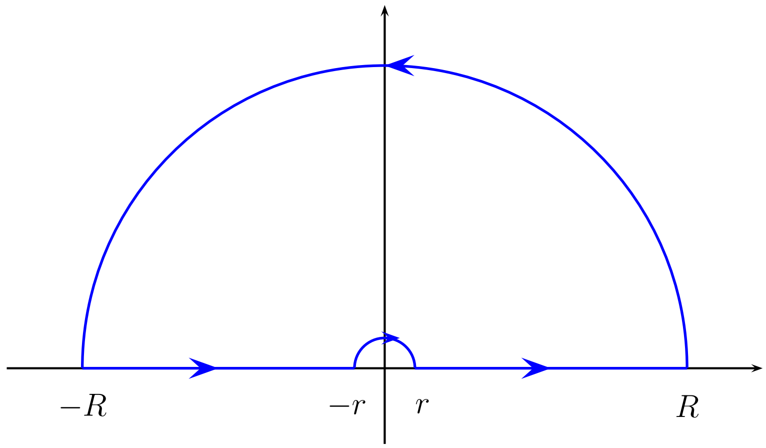
Termin oddania: 7 grudnia 2007

Maciej Borodzik

Zadanie 1. Oblicz całkę

$$\int_0^\infty \frac{\sin^3 x}{x^3} dx.$$

Wskazówka 1. Rozpatrz całkę po konturze Γ, gdzie Γ jest jak na rysunku.



Zadanie 2. Udowodnić ściśle, że dla każdej krzywej gładkiej $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ i dowolnej funkcji holomorficznej f określonej w otoczeniu $\gamma([a,b])$ zachodzi nierówność

$$\left| \int_\gamma f(z)dz \right| \leq \int_\gamma |f| dl(\gamma), \tag{1}$$

gdzie $dl(\gamma)$ jest miarą Lebesgue'a na γ. Przypomnienie $\int_\gamma h dl(\gamma) = \int_a^b h\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}dt$, gdy $\gamma(t) = (x(t), y(t))$.

Przy jakich warunkach we wzorze (1) zachodzi równość?

Zadanie 3. Oblicz sumę

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)^3}.$$

Wskazówka 2. Rozważ całkę z funkcji $\frac{\pi \sin \frac{\pi}{2} z}{z^3 \sin \pi z}$.

Zadanie 4. Niech f będzie funkcją meromorficzną w kole $B(0,R)$, która w kole domkniętym $\bar{B}(0,r)$ $(r < R)$ ma zera $a_1, \dots, a_m$ takie, że $0 < |a_1| \leq |a_2| \leq |a_m| < r$ i bieguny $b_1, \dots, b_n$, przy czym $0 < |b_1| \leq |b_2| \dots \leq |b_n| < r$. Wykaż, że zachodzi

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\theta})| d\theta = \log |f(0)| + \log \frac{r^m}{|a_1 \cdots a_m|} - \log \frac{r^n}{|b_1 \cdots b_n|}.$$

Wskazówka 3. Po pomnożeniu f przez $\frac{r^2 - \bar{a}z}{r(z-a)}$ znika zero w punkcie $z = a$ oraz nie zmienia się $|f(re^{i\theta})|$.

Zadanie 5. Niech $f(z)$ będzie funkcją holomorficzną w pierścieniu $A = \{r_1 < |z| < r_2\}$ przedłużającą się do funkcji ciągłej na domknięcie A. Rozważmy $S(t) = \max\{|f(z)|\colon |z| = e^t\}$. Wykaż, że $S(t)$ jest funkcją wypukłą.

Wskazówka 4. Rozpatrz funkcję $f(z)^p z^{-q}$ dla p i q takich, żeby

$$\frac{\log \frac{S_2}{S_1}}{\log r_2 r_1} < \frac{p}{q} < \frac{\log \frac{S_2}{S_1}}{\log r_2 r_1} + \varepsilon,$$

gdzie $S_1 = S(\log r_1)$ i $S_2 = S(\log r_2)$.

Zadanie 6 (0pt)**.** Naszkicuj zbiory

(a) $\Gamma(x + ki + \frac{1}{2}i)$, gdy $k = -1, 0, 1, 2$, $x \in \mathbb{R}$.
(b) $\{z \in \mathbb{C} \colon \Gamma(z) = 1\}$.
(c) $u(z)$ gdy $Im z = \{0, 1/2, 1, 2\}$ a $u(z) = \int_0^z \left((1-t)^2(1-4t^2)\right)^{-1/2}$.

Wskazówka 5. Do tego celu najlepiej zaprzyjaźnić się z komputerem, a jeszcze lepiej z jakimś informatykiem. Chętna osoba, która napisze program rozwiązujący to zadanie (program powinien być taki, żeby dał się zamieścić na stronie, w szczególności działać), dostanie punkty za to zadanie, tak jak za zwykłe.

Zadanie 7. Niech $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ będą punktami na osi rzeczywistej. Niech też $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ będą liczbami rzeczywistymi takimi, że $0 < \alpha_i < 1$ oraz $\sum \alpha_k = n - 2$. Określamy

$$F(z) = \int_0^z \prod_{k=1}^{n} (t - a_k)^{\alpha_k - 1} dt.$$

Znajdź obraz górnej półpłaszczyzny przy odwzorowaniu F.

Wskazówka 6. Najpierw znajdź obraz prostej rzeczywistej.