Zestaw zadań z Funkcji Analitycznych. Geometria odwzorowań $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

Wersja poprawiona

Maciej Borodzik

Zadania za 0 punktów są przeznaczone do samodzielnego rozwiązywania.

Zadanie 1 (0pkt)**.** Niech a, b, r będą liczbami rzeczywistymi, przy czym $r > 0$. Określamy zbiory $A = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re} = a\}$, $B = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im} = b\}$, $C = \{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$. Dla wybranych parametrów a, b, r naszkicuj zbiory $f(A), f(B), f(C)$ oraz $f^{-1}(A)$, $f^{-1}(B)$, $f^{-1}(C)$, gdzie f jest zadana przez

(1) $f(z) = z^2$
(2) $f(z) = z^3$
(3) $f(z) = e^z$
(4) $f(z) = \frac{1}{z}$
(5) $f(z) = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$ (funkcja Żukowskiego).
(6) $f(z) = \frac{z+i}{-iz+1}$ (pewna szczególna homografia)

Zadanie 2 (0pkt)**.** Znajdź postać przekształcenia biholomorficznego (dyfeomorfizmu zespolonego), który przeprowadza zbiór A na B, gdy

(1) $A = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1, \frac{5}{6}\pi < \mathrm{Arg}\, z < \pi\}$, $B = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\, z > 0\}$.
(2) $A = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1, \mathrm{Im}\, z > 0\}$, $B = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.
(3) $A = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\} \setminus \{[0, 1) \in \mathbb{R}\}$, $B = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \mathrm{Re}\, z < 1\}$.
(4) $A = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \mathrm{Arg}\, z < \frac{1}{2}\pi\}$, $B = \{z \in \mathbb{C} : 1 < \mathrm{Im}\, z < 2, \mathrm{Re}\, z > 0\}$.

Zadanie 3. Niech U będzie obszarem w $\mathbb{C}$. Niech $f : U \to \mathbb{C}$ będzie różniczkowalna w sensie rzeczywistym i $detDf(x) \neq 0$ w żadnym punkcie $x \in U$. Wykaż, że następujące warunki są równoważne

(1) f spełnia równania Cauchy'ego–Riemanna: $\frac{\partial \mathrm{Re}\, f}{\partial x} + i \frac{\partial \mathrm{Im}\, f}{\partial y} = 0$. *Odwieczny problem, czy w równaniach Cauchy'ego–Riemanna występuje plus, czy minus można rozstrzygnąć biorąc $f(z) = z = x + iy$, która jest holomorficzna. Jest to prawdopodobnie o wiele łatwiejsze, niż uczenie się znaku na pamięć.*
(2) f zachowuje orientację i jest *konforemna*, czyli dla dowolnych dwóch krzywych $\gamma_1, \gamma_2 \subset U$, które przecinają się w x_0 pod kątem α, obrazy $f(\gamma_1), f(\gamma_2)$ przecinają się w $f(x_0)$ również pod kątem α.
(3) $Df(x)$ jest złożeniem jednokładności i obrotu dla każdego x
(4) $\forall x \in U$ istnieje granica $\lim\limits_{h \to 0, h \in \mathbb{C}} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

Odpowiedniość między przekształceniami holomorficznymi a konforemnymi jest właściwa wyłącznie dla wymiaru zespolonego 1. Poniższe zadania pozwalają zobaczyć to dokładniej.

Zadanie 4. Niech U będzie obszarem w $\mathbb{C}^n \ni (z_1, \ldots, z_n)$ oraz $z_i = x_i + y_i$. Niech $f : U \to \mathbb{C}^n$ będzie klasy C^1 oraz spełnia równania Cauchy'ego–Riemanna ze względu na każdą zmienną $(\frac{\partial \mathrm{Re}\, f}{\partial x_i} + i \frac{\partial \mathrm{Im}\, f}{\partial y_i})$. Wykaż, że Df jest konforemna. To jest nieprawdziwe! Wystarczy wziąć $f(z_1, z_2) = (z_1, 2z_2)$. Zauważyła to p. Pawlik.

Zadanie 5. Skonstruuj przekształcenie z $\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$, które jest konforemne, zachowuje orientację, ale nie jest holomorficzne (nie spełnia równań Cauchy'ego–Riemanna).

Zadanie 6. Jaka relacja pomiędzy grupami $U(n)$ i $SO(2n)$ dla $n = 1$ odpowiada za to, że przekształcenia konforemne $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, które zachowują orientację, są tym samym to przekształcenia holomorficzne. Konforemność nie oznacza, że pochodna jest w $SO(2)$, ani holomorficzność nie oznacza, że pochodna jest w $U(1)$. Przekształcenie jest holomorficzne, jeśli pochodna jest w $GL(n, \mathbb{C})$, zaś konforemne, jeśli macierz jest iloczynem macierzy z $SO(2n)$ z macierzą proporcjonalną do identycznościowej. Niech $K(2n)$ będzie grupą macierzy konforemnych, podgrupą w $GL(2n, \mathbb{R})$ rozpiętą przez macierze proporcjonalne do identyczności i $SO(2n)$. Wtedy $K(2) = GL(1, \mathbb{C})$, ale $K(2n)$ ogólnie nie pokrywa się z $GL(n, \mathbb{C})$.