Zadania przygotowawcze przed kolokwium z FAN'u

Maciej Borodzik

08.12.2008

Zadanie 1. Dla $a > b > 0$ obliczyć całkę
$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{(a + b\cos\phi)^2} d\phi.$$

Zadanie 2. Niech a zespolona i $ima \neq 0$. Oblicz
$$\int_0^{2\pi} \operatorname{ctg}(\phi + a) d\phi.$$

Zadanie 3. Niech $n \in \mathbb{Z}$, $n > 0$. Oblicz
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)^n} dx.$$

Zadanie 4. Oblicz całkę
$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2(x^2+1)} dx.$$

Zadanie 5. Wylicz całki
$$\int_{-\infty} \frac{x\cos x}{x^2 - 2x + 10} dx \text{ oraz } \int_{-\infty} \frac{x \sin x}{x^2 - 2x + 10}.$$

Zadanie 6. Dla $p > 1$, rzeczywistego, oblicz całkę
$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x^p}{x^p} dx.$$

Zadanie 7. Dla $-1 < p < 1$ oraz $-\pi < \lambda < \pi$ oblicz
$$\int_0^{\infty} \frac{x^p dx}{x^2 + 2x\cos\lambda + 1}.$$

Zadanie 8. Ile pierwiastków w $K(0, 1)$ mają następujące wielomiany?

(a) $z^3 + 3z - 1$;
(b) $z^4 + 6z^3 - 2z + 2$;
(c) $2z^5 + z^3 - \frac{1}{2}z$;
(d) $z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots + \frac{z^n}{n!}$;

Zadanie 9. Znajdź ilość pierwiastków poniższych wielomianów w pierwszej ćwiartce:

(a) $z^3 + 4z^2 + 3$;
(b) $z^8 + 4z^4 + 3z + 6$;
(c) $z^7 - z^6 + 2z^3 + 5$; (wskazówka — wykaż, że nie ma pierwiastków rzeczywistych dodatnich).

Zadanie 10. Niech $f : B(0, 1) \to \mathbb{C}$ będzie holomorficzna oraz różnowartościowa. Wykaż, że pole obrazu $f(B(0, 1))$ wyraża się wzorem
$$\pi \sum n|a_n|^2,$$
jeśli $f(z) = \sum a_n z^n$.

Zadanie 11. Oblicz
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4+1}.$$

Zadanie 12. Scharakteryzuj takie homografie, które zachowują zarówno prostą rzeczywistą, jak i prostą urojoną.

Zadanie 13. Niech f i g będą funkcjami holomorficznymi na kole $K(0,1)$, przy czym $\forall n > 1$ zachodzi
$$f(\frac{1}{n})g'(\frac{1}{n}) = -f'(\frac{1}{n})g(\frac{1}{n}).$$
Co można powiedzieć o funkcjach f i g?

Zadanie 14. Przekształć konforemnie zbiór $A = \{z \in \mathbb{C} : \arg z \in (0, \frac{pi}{7}\}$ na zbiór $B = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z \in (-\pi, \pi)\}$.

Zadanie 15 (zrobimy je któregoś dnia na ćwiczeniach)**.** Niech v i w będą dwoma liczbami zespolonymi liniowo niezależnymi nad $\mathbb{R}$. Określamy funkcję
$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\substack{k,l \in \mathbb{Z} \\ (k,l) \neq (0,0)}} \left(\frac{1}{(z - kv - lw)^2} - \frac{1}{(kv + lw)^2} \right).$$

- Wykaż, że szereg definiujący sumę jest niemal jednostajnie zbieżny dla z znajdującym się poza zbiorem $\Gamma = \{kv + lw \colon k, l \in \mathbb{Z}\}$ (ta część jest najbardziej czasochłonna, więc daję za nią mało punktów, żeby nie tracić czasu).
- Wykaż, że $\wp(z)$ jest meromorficzna i ma bieguny tylko w punktach z Γ.
- Oblicz residua $\wp(z_0)$ dla $z_0 \in \Gamma$.
- Wykaż, że $\wp(z + v) = \wp(z + w) = \wp(z)$, czyli funkcja $\wp$ jest dwuokresowa.
- Udowodnij, że istnieją takie stałe c_1, c_2 i c_3, że dla wszystkich punktów $z \in \mathbb{C}$ zachodzi
$$\wp'(z)^2 - 4\wp(z)^3 - c_1\wp(z)^2 - c_2\wp(z) \equiv c_3.$$
- Uzasadnij, że funkcja $\wp$ przeprowadza torus z wykłutym punktem na zbiór zer wielomianu $y^2 - 4x^3 - c_1x^2 - c_2x - c_3$ w $\mathbb{C}^2$.

Podpunkty można rozwiązywać niezależnie i można powoływać się na poprzedni podpunkt, nawet, jeśli się go nie rozwiązało.