1. Zadania z FAN

Zadanie 1. Wykaż, że dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje takie C, że jeśli $z \in \mathbb{C}$ nie leży w żadnej kuli o środku w punkcie całkowitym i promieniu ε, to

$$|\operatorname{ctg} \pi z| < C.$$

Zadanie 2. Wykaż, że wszystkie rozwiązania równania $\operatorname{tg} x = x$ są rzeczywiste.

Zadanie 3. Niech $p \in (0,1)$Wykaż, że wzór

$$F(z) = z^{-p}(1-z)^{p-1}$$

zadaje funkcje holomorficzną w $\mathbb{C} \setminus [0,1]$. Dla $x \in (0,1)$ oblicz

$$\lim_{y \to 0^{\pm}} F(x+iy).$$

Granica prawostronna i lewostronna mogą być różne.

Zadanie 4. Wykorzystaj powyższe zadanie do obliczenia $\Gamma(p)\Gamma(1-p)$.

Zadanie 5. Niech f i g będą funkcjami całkowitymi takimi, że $\forall z \in \mathbb{C}$ zachodzi $|f(z)| \leq |g(z)|$. Wykaż, że istnieje $\lambda \in \mathbb{C}$ taka, że $f(z) = \lambda g(z)$.

Zadanie 6. Niech $g : S^1 \to \mathbb{C}$ będzie zadana wzorem $g(z) = \bar{z}$. Udowodnij, że *nie* istnieje taka funkcja holomorficzna $f : D \to \mathbb{C}$, że $f|_{\partial D} = g$. Rozwiązania dłuższe niż na stronę nie będą przyjmowane, w przypadku, gdy więcej jak 3 osoby rozwiążą tą samą metodą, punkty się społowią, można oddawać rozwiązania na więcej, niż 1 sposób (jest co najmniej 10).

Zadanie 7. Scharakteryzuj te funkcje $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorficzne, o tej własności, że $f^{-1}(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$.

Zadanie 8. Niech T będzie obszarem zadanym równaniami

$$\Im z > 0,\ \Re z \in (0,1),\ |z - \frac{1}{2}| > \frac{1}{2}.$$

Niech $h : T \to \{z\colon \Re z > 0\}$ będzie biholomorfizmem takim, że $h(0) = 0$, $h(1) = 1$ i $h(\infty) = \infty$ (istnienie takiego h można z góry założyć). Wykaż, z zasady odbicia, że h przedłuża się do funkcji holomorficznej

$$\tilde{h}\colon \{z\colon \Re z > 0\} \to \mathbb{C} \setminus \{0, 1, \infty\}.$$

Tę funkcję nazywa się modułową albo modularną.

Zadanie 9. Niech g będzie funkcją całkowitą taką, że 0 i 1 nie są w obrazie g. Wykaż, że g jest stała. Wskazówka, rozpatrz $z \to \tilde{h}^{-1}(g(z))$, przy czym nie jest to kompletnie trywialne.

Zadanie 10. Znajdź wszystkie funkcje holomorficzne f z dysku w dysk takie, że $f(f(z)) = z$.