Zestaw zadań z Funkcji Analitycznych. 3/3. *Każde zadanie jest za 5 punktów.*
Termin oddania: 6 czerwca 2009
Zadania można wręczać osobiście, przez kogoś, wkładać do skrytki, przesyłać elektronicznie, sfotografować (byle dobrze) i przesłać jpeg, (albo inny sensowny format), w ostateczności wsuwać pod drzwi pokoju 5460.

Zadanie 1. Wykaż, że homografia przeprowadzająca liczby rzeczywiste na liczby rzeczywiste może być zapisana w postaci

$$z \to \frac{az+b}{cz+d},$$

gdzie a, b, c i d są rzeczywiste.

Zadanie 2. Scharakteryzuj wszystkie homografie przeprowadzające koło jednostkowe na koło jednostkowe.

Zadanie 3. Znajdź przekształcenie *biholomorficzne* które przeprowadza następujące obszary na koło jednostkowe

(1) $\Omega_1 = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| < 1, 0 < \operatorname{Arg} z < \frac{pi}{13}\}$;
(2) $\Omega_2 = \{z \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Re} z > 0, |z| > 1\}$;
(3) $\Omega_3 = \{z \in \mathbb{C} \colon 0 < \operatorname{Im} z < 1\}$;
(4) $\Omega_4 = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| < 1\} \setminus [0, 1)$;
(5) $\Omega_5 = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| < 1\} \setminus [1/2, 1)$;

Zadanie 4. Niech $w_1, \dots, w_k$ będą punktami na okręgu jednostkowym. Niech też $a_1, \dots, a_k$ będą liczbami rzeczywistymi dodatnimi. Zbadaj obraz koła jednostkowego przy przekształceniu Schwarza–Christoffela zadanym przez

$$z \to \int_0^z \frac{1}{(w-w_1)^{a_1} \dots (w-w_k)^{a_k}} dw$$

naśladując argument z ćwiczeń dla całek Schwarza–Christoffela na prostej.

Zadanie 5. Rozpatrując całkę z funkcji $\frac{1}{z - z^2 \operatorname{ctg} z}$ po odpowiednich konturach, wykaż, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} = \frac{1}{10},$$

gdzie λ_n jest jedynym pierwiastkiem równania $z = \operatorname{tg} z$ zawartym w przedziale $\big(n\pi, (n+\frac{1}{2})\pi\big)$.

Zadanie 6. Wykaż, że wzór

$$z \to \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(z+n)} + \int_1^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \tag{1}$$

zadaje przedłużenie analityczne funkcji $\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$. Na jakim zbiorze to przedłużenie analityczne jest określone? Udowodnij, że tak rozszerzona funkcja Γ nadal spełnia równanie $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ dla wszystkich tych z, dla których to ma sens.