Zestaw zadań z Funkcji Analitycznych. 2/3. *Każde zadanie jest za 5 punktów.*
Termin oddania: 15 maja 2009
Zadania można wręczać osobiście, przez kogoś, wkładać do skrytki, przesyłać elektronicznie, sfotografować (byle dobrze) i przesłać jpeg, (albo inny sensowny format), w ostateczności wsuwać pod drzwi pokoju 5460.

Zadanie 1. Korzystając z wyników zadania 2 z poprzedniego zestawu, tzn. zapisując

$$\sin nx = \sin x \cdot C_n(1-\alpha_1 \sin x)\dots(1-\alpha_n \sin x),$$

dla n nieparzystych. Podstawiwszy $z = nx$ i przechodząc z n do nieskończoności wyprowadź wzór Eulera

$$\sin z = z\prod\left(1-\frac{z^2}{n^2\pi^2}\right).$$

Zadanie 2. Rozwijając obie strony wzoru Eulera w szereg Taylora wykaż, że

$$\sum \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

oraz

$$\sum \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Zadanie 3. Dla $a > 0$ rzeczywistego oblicz sumę

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4+a^4}.$$

Przechodząc z a do 0 wykaż, że $\sum \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$. Uzasadnij możliwość przejścia do granicy w sumie.

Zadanie 4. Dla ustalonych parametrów $w \in \mathbb{C}$, r_1 i r_2 dodatnich spełniających $|w| \in (r_1, 1-r_2)$ rozpatrujemy zbiór

$$A_{w,r_1,r_2} = \{z\colon |z| \in (r_1, 1), |z-w| > r_2\},$$

czyli dysk z dwoma dziurami. Dla jakich par trójek (w, r_1, r_2), (w', r_1', r_2') zachodzi

$$A_{w',r_1',r_2'} \simeq A_{w,r_1,r_2},$$

gdzie $\simeq$ oznacza biholomorficzną równoważność (tzn. istnienie przekształcenia holomorficznego, przekształcającego jeden na drugi, przedłużającego się do homeomorfizmu na domknięcie).

Zadanie 5. Niech T będzie obszarem określonym równaniami

$$0 < \operatorname{Re} z < 1,\ \operatorname{Im} z > 0,\ \ |z-\frac{1}{2}| > \frac{1}{2}.$$

Niech F będzie odwzorowaniem biholomorficznym T na górną półpłaszczyznę, przedłużającym się do ciągłego na brzeg. (Istnienie F wynika z twierdzenia Riemanna o odwzorowaniu konforemnym).

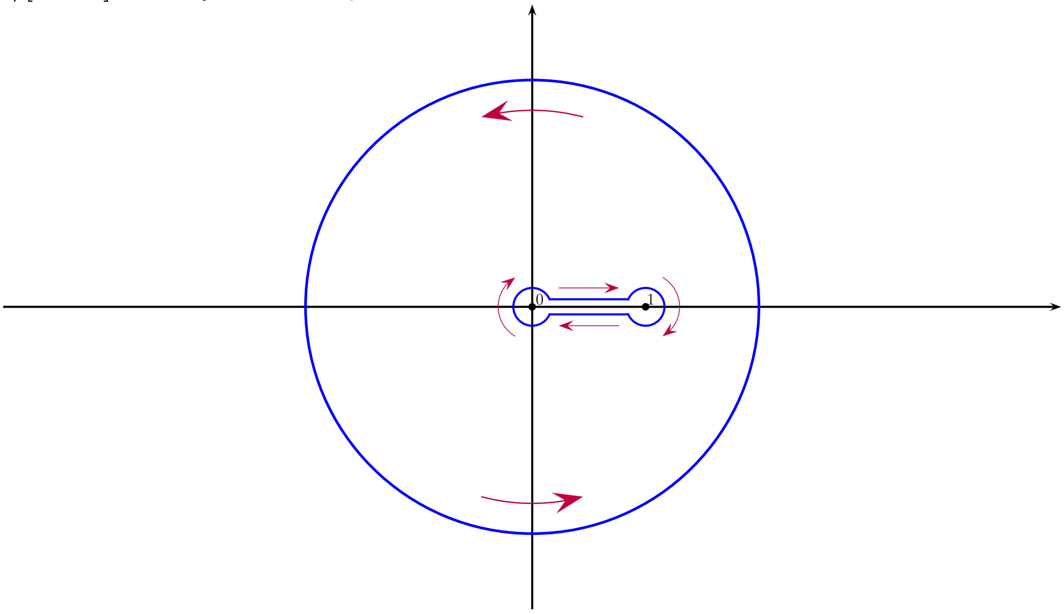
(a) Wykaż, że można wybrać takie F, że $F(\{\infty, 0, 1\}) = \{0, 1, \infty\}$.
(b) Udowodnij, z zasady odbicia, że F można rozszerzyć do odwzorowania $\tilde{F}$, określonego na całej górnej półpłaszczyźnie, którego obrazem jest cała płaszczyzna $\mathbb{C}$ bez punktów 0 i 1.

Zadanie 6. Niech g będzie funkcją całkowitą, która nie przyjmuje wartości 0 ani 1. Udowodnij, że g jest stała. Wskazówka: rozważ funkcję $z \to F^{-1}(g(z))$ z poprzedniego zadania.

Zadanie 7. Niech $p \in (0,1)$. Oblicz całkę

$$I(p) = \int_0^1 \frac{dx}{x^p(1-x)^{1-p}}.$$

Wskazówka: rozważ funkcję $F(z) = \frac{1}{z^p(1-z)^{1-p}}$. Wykaż, że jest ona holomorficzna na $\mathbb{C} \setminus [-1,1]$. Następnie całkuj po konturze



gdzie promień dużego okręgu ucieka do nieskończoności.
Wyraź $I(p)$ w terminach funkcji Γ lub B Eulera.