Zestaw zadań z Funkcji Analitycznych. 1/3. *Każde zadanie jest za 5 punktów.*
Termin oddania: 16 kwietnia 2008
Zadania można wręczać osobiście, przez kogoś, wkładać do skrytki, przesyłać elektronicznie, sfotografować (byle dobrze) i przesłać jpeg, (albo inny sensowny format), w ostateczności wsuwać pod drzwi pokoju 5460.

Zadanie 1. Zbadać zbieżność szeregu
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+i}},$$
gdzie wybieramy standardową gałąź logarytmu $z^a = \exp(a \operatorname{Log} z)$.

Zadanie 2. Wykazać, że dla dowolnego $n = 2k+1$ istnieje wielomian P_n stopnia n taki, że dla wszystkich x rzeczywistych zachodzi
$$\sin(2k+1)x = \sin x \cdot P_n(\sin x).$$
Znaleźć wszystkie pierwiastki tego wielomianu. Zapisując
$$P_n(u) = C_n(1-\alpha_1 u) \cdot \dots \cdot (1-\alpha_n u).$$
wyznaczyć stałą C_n.

Zadanie 3. Scharakteryzować funkcje całkowite, które przyjmują wartości rzeczywiste wyłącznie na prostej rzeczywistej.

Zadanie 4. Podać przykład takiego, szeregu liczbowego c_n, że dla każdego k naturalnego większego od zera
$$\sum c_n^k$$
jest zbieżny, ale nie jest zbieżny bezwzględnie.

Zadanie 5. Udowodnić twierdzenie Liouville'a korzystając z zasady maksimum i twierdzenia o usuwaniu osobliwości.

Zadanie 6. Skonstruuj taki szereg potęgowy
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$
zbieżny bezwzględnie na $|z| < 1$, zbieżny warunkowo punkcie $z = 1$, oraz ciąg punktów $z_k \to 1$, gwałcący założenia twierdzenia Abela, że **nie** zachodzi
$$\lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_n z_k^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$