Kolokwium z FAN'u

dzień św. Łucji A.D. MMVIII,
godz. 10:00 – 12:30.
Maciej Borodzik

Zasady:

- Jeśli $P_1, \dots, P_6$ oznaczają liczby punktów za poszczególne zadanie, to suma punktów wylicza się wzorem
$$S = \begin{cases} 0 & \text{gdy } P_1 + P_2 < 7. \\ P_1 + P_2 + \frac{1}{2}(P_3 + \cdots + P_6) & \text{gdy } P_1 + P_2 \in [7, 12] \\ \sum P_k & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$
- Rozwlekłość rozwiązań będzie delikatnie zauważana w postaci obcinania punktów: za rozwiązanie zadania 1, 2 i 5 na więcej, niż 1 kartce A4 można dostać co najwyżej 9 punktów; za rozwiązanie zadania 3 i 4 na więcej, niż 1 *stronie* A4 można dostać co najwyżej 3 punkty.

Zadanie 1 (10pkt)**.** Oblicz całkę
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+1)^2(x^2+2)} dx.$$

Zadanie 2 (10pkt)**.** Oblicz całkę
$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 \phi}{2 + \cos \phi} d\phi.$$

Zadanie 3 (5pkt)**.** Znajdź ilość pierwiastków wielomianu $z^6 + 6z^3 + z^2 + z + 2$ w kole $B(0,1)$ i w kole $B(0,2)$.

Zadanie 4 (5pkt)**.** Niech $f(z) = \bar{z}^2 + z$. Wykaż, że nie istnieje funkcja holomorficzna $F : B(0,1) \to \mathbb{C}$, przedłużająca się do ciągłej na $C(0,1)$, taka, że $F(z) = f(z)$, gdy $|z| = 1$.

Zadanie 5 (10pkt)**.** Niech f i g będą funkcjami całkowitymi, przy czym $\forall z \in \mathbb{C}$ zachodzi $|f(z)| \leq |g(z)|$. Co z tego wynika dla funkcji f i g? *Uwaga.* Zrozumienie, o co chodzi w zadaniu, jest również treścią zadania. Dlatego nie będę udzielał dodatkowych wskazówek.

Zadanie 6 (10pkt)**.** Niech f będzie funkcją całkowitą (tzn. holomorficzną na całym $\mathbb{C}$), przy czym istnieje takie $p \in \mathbb{R}^+$, że $f(z) = o(|z|^p)$, gdy $|z| \to \infty$.

Udowodnij, że f jest wielomianem.