1. Zadania z Funkcji Analitycznych, seria styczniowa.

Zadanie 1.1. Oblicz przyrost argumentu funkcji $z^6 + z^5 + 6z^4 + 5z^3 + 8z^2 + 4z + 1$ wzdłuż prostej urojonej przebieganej z góry do dołu.

Zadanie 1.2. Zbadaj liczbę pierwiastków równania $z^4 + 2z^3 + 3z^2 + 2z + 2 = 0$ w prawej półpłaszczyźnie i w prawej górnej ćwiartce.

Uwaga: jeśli ktoś nie pamięta, to przyrost argumentu funkcji wzdłuż krzywej zamkniętej to 2π razy liczba zer minus liczba biegunów we wnętrzu.

Zadanie 1.3. Wykaż, że wszystkie rozwiązania równania $\operatorname{tg} z = z$ są rzeczywiste.

Zadanie 1.4. Znajdź liczbę rozwiązań równania $z^4 - 5z + 1 = 0$ w kole jednostkowym i w pierścieniu o zewnętrznym promieniu 2 a wewnętrznym 1 (to się robi z tw. Rouché).

Zadanie 1.5. Znajdź liczbę rozwiązań równania $e^z - 4z^n + 1 = 0$ w kole jednostkowym, w zależności od parametru n.

Zadanie 1.6. Przypuśćmy, że A_1 i A_2 są domkniętymi pierścieniami o promieniu zewnętrznym 1 i wewnętrznym odpowiednio r_1 i r_2. Założmy, że h jest holomorficzna i przeprowadza domknięcie A_1 na domknięcie A_2.

- Korzystając z zasady odbicia, wykaż, że h rozszerza się do przekształcenia holomorficznego między nakłutymi dyskami o promieniu 1;
- Korzystając z twierdzenia o usuwaniu osobliwości, rozszerz h do przekształcenia holomorficznego między dyskami o promieniu 1 (przedłuż przez 0);
- Korzystając z lematu Schwarza, lub podobnych technik, uzasadnij, że $r_1 = r_2$;
- Pomęcz się jeszcze, żeby pokazać iż jeśli $r_1 = r_2$, to h musi być obrotem.