Zestawy 3 i 4. zadań z Funkcji Analitycznych.

Każde zadanie jest za 5 punktów, chyba że napisano inaczej. Zadania można wręczać osobiście, przez kogoś, wkładać do skrytki, wsuwać pod drzwi pokoju 5460 lub przesyłać elektronicznie.

Wcześniejsze oddanie zadań (nawet niektórych) oznacza, że mogą one zostać sprawdzone wcześniej i — w razie jakiś błędów — daje szansę oddania ponownego.

Niektóre rzeczy zostały poprawione.

Zestaw 3

Termin oddania: 13 stycznia 2009.

Zadanie 1. Oblicz

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2(1-x)}}.$$

Zadanie 2 (zadanie na gwiazdkę)**.** Znajdź przekształcenie przekształcające konforemnie gwiazdę pięcioramienną na gwiazdę sześcioramienną. Gwiazda $n-$ramienna ma wierzchołki w punktach będących pierwiastkami $n-$tego stopnia z jedności, zaś boki są fragmentami odcinków łączących k-ty i $k + \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$-ty wierzchołek (zresztą każdy widział graffiti na murach). Przekształcenie może być określone z dokładnością do jednokładności.

Parametrów, których nie da się określić, nie trzeba określać, tylko powiedzieć, jak się je wyznacza.

Zadanie 3. Niech $f(z)$ będzie funkcją holomorficzną w pierścieniu $A = \{r_1 < |z| < r_2\}$ przedłużającą się do funkcji ciągłej na domknięcie A. Rozważmy $S(t) = \max\{|f(z)|\colon |z| = e^t\}$. Wykaż, że $\log S(t)$ jest funkcją wypukłą.

Wskazówka 1. Rozpatrz funkcję $f(z)^p z^{-q}$ dla p i q takich, żeby

$$\frac{\log \frac{S_2}{S_1}}{\log r_2 r_1} < \frac{p}{q} < \frac{\log \frac{S_2}{S_1}}{\log r_2 r_1} + \varepsilon,$$

gdzie $S_1 = S(\log r_1)$ i $S_2 = S(\log r_2)$.

Zadanie 4 (*)**.** Niech $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Rozpatrujemy równoległoboki A_1 i A_2 o wierzchołkach $\{0, 1, 1+z_1, z_1\}$ i $\{0, 1, 1+z_2, z_2\}$. Przypuśćmy, że istnieje odwzorowanie biholomorficzne f wnętrza A_1 na wnętrze A_2, które przedłuża się do homeomorfizmu $f : \partial A_1 \to \partial A_2$, który dodatkowo przeprowadza wierzchołki na wierzchołki.

Wykaż, że f jest liniowa, oraz $z_1 = z_2$ lub $z_1 z_2 = 1$.

Zadanie 5. Oblicz całkę

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta} \cos(n\theta - \sin\theta) d\theta.$$

Wskazówka: Rozważ funkcję pomocniczą $e^z z^{-n-1}$.

Zadanie 6. Niech $f(z) : B(0,1) \to B(0,1)$ będzie odwzorowaniem biholomorficznym dysku otwartego na dysk otwarty, takim, że $f(0) = 0$. Wykaż, że $f(z)$ jest obrotem. Wywnioskuj stąd, że jedynymi automorfizmami (tzn. odwzorowaniami biholomorficznymi) koła jednostkowego są homografie.

Zestaw czwarty

Termin oddania: 23 stycznia 2009r.

Zadanie 7. Wykaż, że każda funkcja meromorficzna na $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, która nie ma punktów istotnie osobliwych, jest wymierna (tzn. jest ilorazem dwóch wielomianów).

Zadanie 8. Scharakteryzuj wszystkie odwzorowania holomorficzne z $f : B(0,1) \to B(0,1)$, spełniające własność

$$f(f(z)) = z$$

dla wszystkich $z \in B(0,1)$.

Zadanie 9. Niech T będzie obszarem określonym równaniami

$$0 < \operatorname{Re} z < 1,\ \operatorname{Im} z > 0,\ \ |z - \frac{1}{2}| > \frac{1}{2}.$$

Niech F będzie odwzorowaniem biholomorficznym T na górną półpłaszczyznę, przedłużającym się do ciągłego na brzeg. (Istnienie F wynika z twierdzenia Riemanna o odwzorowaniu konforemnym).

(a) Wykaż, że można wybrać takie F, że $F(\{\infty, 0, 1\}) = \{0, 1, \infty\}$.

(b) Udowodnij, z zasady odbicia, że F można rozszerzyć do odwzorowania $\tilde{F}$, określonego na całej górnej półpłaszczyźnie, którego obrazem jest cała płaszczyzna $\mathbb{C}$ bez punktów 0 i 1.

Zadanie 10 (*). Niech g będzie funkcją całkowitą, która nie przyjmuje wartości 0 ani 1. Udowodnij, że g jest stała. Wskazówka: rozważ funkcję $z \to F^{-1}(g(z))$ z poprzedniego zadania.

Zadanie 11. Wyprowadź wzór

$$\frac{1}{\sinh z} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2z}{z^2 + n^2\pi^2}.$$

Zadanie 12. Metodami funkcji analitycznych oblicz całki

$$\text{(a)} \int_0^\infty \cos(x^2)dx$$

$$\text{(b)} \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}.$$

Zadanie 13 (*). Niech $H = L^2(S^1, \mathbb{C})$. Rozważmy podprzestrzeń H^+ funkcji z H, które dają się zapisać w postaci

$$f(\phi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{in\phi}.$$

Ogólnie, każda funkcja daje się zapisać w powyższej postaci, tylko z sumowaniem od $-\infty$, a nie od zera. Niech $f \in H$ będzie dodatkowo ciągła. Wykaż, że następujące warunki są równoważne

(a) $f \in H^+$;

(b) Istnieje $F : B(0,1) \to \mathbb{C}$, holomorficzna, która przedłuża się do funkcji ciągłej na brzeg oraz $F|_{S^1} = f$.

To jest uogólnienie zadania 5. z zestawu drugiego.