1. Zadania z Funkcji Analitycznych, seria 2.

Zadanie 1.1 (niby niezbyt mądre, ale będzie miało dalszy ciąg)**.** Wykazać, że funkcja $z \to \operatorname{tg} z$ jest ograniczona na zbiorze $\operatorname{Im} z > \varepsilon$ dla dowolnego $\varepsilon > 0$.

Zadanie 1.2. Wykazać, że dowolna homografia zachowuje dwustosunek (ang. cross-ratio) czterech punktów na płaszczyźnie, to jest wielkość

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) \mapsto \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} \frac{z_2 - z_4}{z_2 - z_3}.$$

Uzasadnij, że z tego wynika, iż homografie *nie* działają tranzytywnie na zbiorze czwórek punktów. Czy można to uzasadnić inaczej?

Zadanie 1.3. Przypuśćmy, że U jest obszarem w górnej półpłaszczyźnie zaś $f\colon U \to \mathbb{C}$ jest holomorficzna (różniczkowalna w sensie zespolonym). Niech $\overline{U}$ będzie obrazem U przy symetrii osiowej wzdłuż osi rzeczywistej. Sprawdź, że funkcja $g\colon \overline{U} \to \mathbb{C}$ zadana wzorem $g(z) = \overline{f(\overline{z})}$ jest holomorficzna.

Uwaga: wbrew temu, co było powiedziane na wykładzie, to zadanie akurat ma sens.

Zadanie 1.4. Znaleźć homografię, która przeprowadza zbiór zawarty pomiędzy okręgami $\{|z| = 2\}$ i $\{|z - 1| = 1\}$ na obszare $|\operatorname{Re} z| < 1$.

Uwaga: proszę podejść poważnie do tego zadania, bo następne takie zadania pojawią się wyłącznie w zestawach za zero punktów.

Zadanie 1.5. Obliczyć $(-1)^i = e^{i \log(-1)}$ w sytuacji w której log oznacza:

- logarytm określony na zbiorze $\mathbb{C}$ bez półprostej dodatniej urojonej;
- logarytm określony na zbiorze $\mathbb{C}$ bez półprostej ujemnej urojonej.

W obu przypadkach zakładamy, że logarytm przyjmuje wartości rzeczywiste dla argumentów rzeczywistych dodatnich.

Czy są jeszcze inne wartości, jakie może przyjmować $(-1)^i$?

Zadanie 1.6. Wskazać liczby zespolone z_1, z_2 takie, $\operatorname{Log}(z_1 z_2) \neq \operatorname{Log}(z_1) + \operatorname{Log}(z_2)$.

Zadanie 1.7. Wykaż że funkcja $\log(\frac{z-1}{z-2})$ jest dobrze określona na zbiorze $|z| > 2$.

Zadanie 1.8.

- Znaleźć obraz pasa $|\operatorname{Re} z| < \frac{\pi}{2}$ przy przekształceniu $z \mapsto \cos z$.
- Wyznaczyć obraz prostej $K_x = \{z : \operatorname{Re}(z) = x\}$ przy przekształceniu $\cos z$. Rozważyć starannie szczególne przypadki: $x = \pi + 2k\pi$, $x = 2k\pi$, $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$.
- Wyznaczyć obraz górnej półpłaszczyzny przy przekształceniu $z \mapsto \cos z$.

Zadanie 1.9 (*)**.** To zadanie pracuje tylko w kategorii zespolonej. Dla rzeczywistej funkcja $\sin x$ jest bezczelnym kontrprzykładem. Niech $f\colon (-1, 1) \to \mathbb{R}$ będzie *rzeczywistą* funkcją analityczną, taką, że $f = \sum a_n x^n$ i szereg ma promień zbieżności co najmniej jeden. Przypuśćmy dodatkowo, że

- $f(0) = 0$;
- $f'(0) = 1$;

- $|f(x)| < 1$ dla wszystkich x z przedziału $(-1, 1)$ (ten warunek jest, oczywiście kluczowy).

Udowodnij, że $f(x) = x$.

Uwaga! To zadanie ma bardzo pomysłowe i niezbyt trudne (jak się już raz widziało) rozwiązanie i bardzo głębokie konsekwencje. Uogólnia się na przypadek funkcji wielu zmiennych, rzeczywistych albo zespolonych.