Zestaw zadań z Funkcji Analitycznych. . *Każde zadanie jest za 5 punktów.*
Termin oddania: 3 grudnia 2008.
Zadania można wręczać osobiście, przez kogoś, wkładać do skrytki lub przesyłać elektronicznie
Wcześniejsze oddanie zadań (nawet niektórych) oznacza, że mogą one zostać sprawdzone wcześniej i, w razie jakiś błędów, daje szansę oddania ponownego.

Zadanie 1. Wykaż, że wszystkie pierwiastki równania $\operatorname{tg} x = x$ są rzeczywiste.

Zadanie 2. Rozpatrując całkę z funkcji $\frac{1}{z - z^2 \operatorname{ctg} z}$ po odpowiednich konturach, wykaż, że

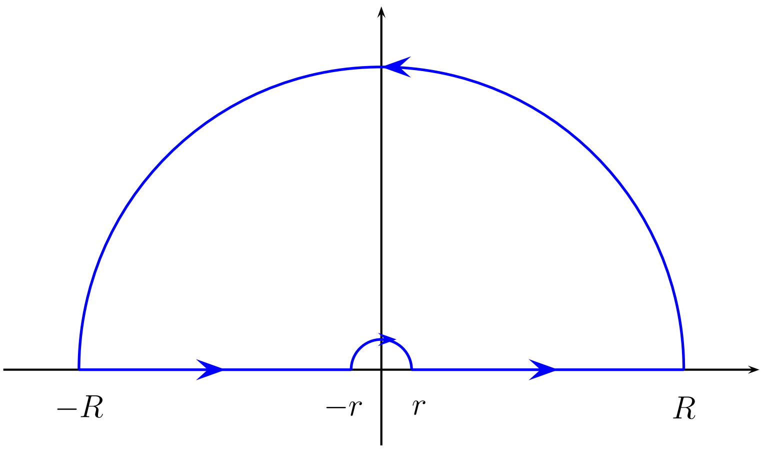
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} = \frac{1}{10},$$

gdzie λ_n jest jedynym pierwiastkiem równania $z = \operatorname{tg} z$ zawartym w przedziale $\big(n\pi, (n + \frac{1}{2})\pi\big)$.

Zadanie 3. Oblicz całkę

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^3 x}{x^3} dx.$$

Wskazówka 1. Rozpatrz całkę po konturze Γ, gdzie Γ jest jak na rysunku.



Wskazówka 2. Odpowiedzią nie jest zero!

Zadanie 4. Niech F będzie zadana wzorem

$$F(z) = \int_0^z (z-1)^{-1/3}(z+1)^{-1/3} dt,$$

gdzie wybieramy gałąź pierwiastka rozciętą wzdłuż półosi urojonej $rez = 0$, $imz < 0$. Znajdź obraz górnej półpłaszczyzny przy odwzorowaniu F.

Wskazówka 3. Najpierw znajdź obraz prostej rzeczywistej. Możesz przyjąć, że $F(1) = a$ zaś $F(-1) = b$.

Zadanie 5. Niech $f(z) = \bar{z}$ będzie funkcją określoną na okręgu $C = \{|z| = 1\}$.

Udowodnij, że **nie** istnieje taka funkcja $F : D \to \mathbb{C}$, (gdzie $D = \{|z| \leq 1\}$), holomorficzna w $\int D$ i ciągła w D taka, że $F|_C = f$.

Uwaga. Zadanie można zrobić na kilkanaście sposobów. Za podanie dwóch różnych sposobów przyznam dodatkowy punkt. Za podanie oryginalnego sposobu, takiego, że nikt inny nie podał, przyznam dodatkowe 3 punkty.