Egzamin z Funkcji Analitycznych.
W semestrze zimowym 2009/2010
Maciej Borodzik

1. Warunki dostateczne do niezdania egzaminu

1. Nieznajomość pojęć:

- liczba zespolona, argument, moduł
- zbiór otwarty, zbiór zwarty
- zbiór spójny i jednospójny
- funkcja holomorficzna (min. 2 definicje wymagane od każdego)
- zbieżność jednostajna
- zbieżność niemal jednostajna
- całka po krzywej
- indeks punktu względem krzywej
- biegun
- residuum

Twierdzenie Morery może być w ostateczności uznane za definicję funkcji holomorficznej. Definicja topologiczna indeksu może też być uznana, jeśli zdający nic z siebie nie wydusi.

2. Nieznajomość sformułowań twierdzeń:

- Lemat Goursata
- zasada argumentu
- zasada maksimum
- zasada identyczności
- wzór całkowy Cauchy'ego (chodzi o jakiekolwiek sensowne sformułowanie)
- twierdzenie Morery
- twierdzenie Rouche
- twierdzenie Liouville'a
- twierdzenie o granicy niemal jednostajnej ciągu funkcji holomorficznych
- charakteryzacja punktu istotnie osobliwego

Nieznajomość oznacza tutaj fundamentalną nieznajomość, ewentualnie znajomość treści bez jakiegokolwiek cienia zrozumienia, a nie zacięcie się w szczególe jednego z założeń, przejęzyczenie się czy np. pomylenie w pierwszej chwili jednego twierdzenia z drugim.

3. Uporczywe trwanie w następujących przekonaniach: (wszystkie poniższe sformułowania są błędne!)

- $|z|$, $argz$, $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$ są funkcjami holomorficznymi
- $\ln z$, z^α dla $\alpha \neq 0, 1, 2, \dots$ jest dobrze określoną funkcją holomorficzną na $\mathbb{C}$
- $\cos z, \sin z$ jest ograniczony w górnej półpłaszczyźnie
- zasada identyczności zachodzi dla obszarów niespójnych

4. Znajomość mniej niż dwóch dowodów oznaczonych znakiem (dowód!) w części "Zagadnienia" poniżej

Uwaga! To są warunki dostateczne, ale nie są to warunki konieczne. Ocenę niedostateczną można dostać również z innych powodów.

2. Zagadnienia.

Gwiazdką oznaczyłem zagadnienia, które dopiero pojawią się na wykładzie. Sformułowanie 'dowolny dowód' oznacza, że w literaturze spotyka się kilka różnych dowodów i można podać dowolny, w tym wymyślony przez siebie, byle zrozumiany i poprawny. Sformułowanie 'dowód' oznacza, że podany na wykładzie dowód należy do najprostszych możliwych i raczej w literaturze będą dowody różniące się co najwyżej szczegółami. Oczywiście zaprezentowanie dowodu innego niż na wykładzie (zrozumianego i poprawnego) również jest dopuszczalne.

(1) Postać macierzowa liczby zespolonej.
(2) Pochodna zespolona. Równoważność różnych definicji.
(3) Całka po krzywej zamkniętej. Indeks punktu względem krzywej — definicja analityczna wraz z dowodem całkowitości. Lemat Goursata (dowód!).
(4) Wzór całkowy Cauchy'ego dla obszarów wypukłych (dowód!).
(5) Twierdzenie Morery (dowód!). Istnienie funkcji pierwotnej dla funkcji holomorficznej w obszarze wypukłym (dowód!).
(6) Twierdzenie Liouville'a (jeden z dwóch dowodów!), zasadnicze twierdzenie algebry (dowolny dowód wykorzystujący funkcje analityczne!).
(7) Rozwijalność funkcji holomorficznej w szereg potęgowy (dowód!). Maksymalność promienia zbieżności.
(8) Zasada identyczności (dowód). Konieczność warunku spójności.
(9) Twierdzenie Cauchy'ego dla dowolnych obszarów (dowód z wykładu, ewentualnie szkic dowodu topologicznego poparty zrozumieniem). Konieczność warunku $\operatorname{ind}_\Gamma z = 0$ dla $z \notin \Omega$.
(10) Granica niemal jednostajnie zbieżnego ciągu funkcji holomorficznych (dowód).
(11) Twierdzenie o odwzorowaniu otwartym (dowód).
(12) Zasada maksimum (dowód!). Lemat Schwarza dla odwzorowań z $B(0,1)$ w $B(0,1)$ (jedno ze sformułowań i dowód).
(13) Klasyfikacja izolowanych punktów osobliwych funkcji holomorficznych (dowód), twierdzenie o usuwaniu punktów osobliwych (dowolny dowód).
(14) Definicja funkcji meromorficznej.
(15) Definicja residuum. Twierdzenie o residuach (szkic dowodu), wyznaczanie residuów.
(16) Zasada argumentu (dowód). Twierdzenie Rouche (dowód, przykładowe zastosowania).
(17) Charakteryzacja obszarów jednospójnych (dowód elementarnych implikacji).
(18) Twierdzenie Rungego o aproksymacji (szkic dowodu).
(19) Definicja rodziny normalnej (jedna z dwóch nierównoważnych(!) występujących w literaturze) i małe twierdzenie Montela (dowód!).
(20) Twierdzenie Riemanna o odwzorowaniu konforemnym (dowód).
(21) (*) Twierdzenie Mittag–Lefflera (dowód).

(22) (*) Rozwijanie funkcji w szeregi Laurenta.
(23) (*) Rozkład funkcji meromorficznej na ułamki proste (przykłady).
(24) (*) Rozkład funkcji całkowitej w iloczyn nieskończony (przykłady).

3. Zagadnienia na egzamin pisemny

Egzamin będzie się składał z dość dużej ilości zadań (około 10) (w stylu egzaminu u prof. Ligockiej), z których większość, 6–7, (wystarczająca na przyzwoite zaliczenie) będzie krótkimi, standardowymi zadankami na jeden z podanych tematów. Zadania te będą miały na celu nie tyle sprawdzenie ogólnej wiedzy matematycznej, ale na ile ktoś się nauczył FA. Będą też 3–4 krótkie zadania teoretyczne o różnej skali trudności (np. znaleźć wszystkie funkcje całkowite takie, że $f(f(z)) = z^2$ itp.).

W nawiasach podałem odpowiednie podrozdziały w zbiorku Krzyża.

(1) Obliczanie całek przez residua. W szczególności całek od 0 do ∞, albo 0 do 2π z wyrażeń zawierających $\sin\phi$, $\cos\phi$ itp. (Krzyż: 3.6, 3.7 ewentualnie 3.4, 3.5).
(2) Zastosowanie twierdzenie Rouche i zasady argumentu do liczenia liczby pierwiastków wielomianów w zadanych obszarach. (Krzyż: 3.9)
(3) Zastosowanie zasady identyczności do sprawdzania, czy istnieje funkcja o zadanych wartościach (np. czy istnieje funkcja holomorficzna spełniająca $f(1/n) = (-1)^n/n$ określona (a) na $B(0,1)$, (b) na $Re z > 0$).
(4) Badanie charakteru punktu osobliwego (biegun, osobliwość istotna, osobliwość pozorna) zadanej funkcji. (Krzyż: 3.3)
(5) Badanie, czy dana rodzina jest normalna. (Krzyż: 4.8)
(6) Proste własności homografii. (Krzyż: 1.4, 1.5, 1.6, 1.7, ale bez przesady).
(7) Wykorzystanie funkcji analitycznych do sumowania szeregów liczbowych. (Krzyż: 4.6)
(8) Rozkład funkcji na ułamki proste, ew. iloczyn nieskończony. (Krzyż: 5.2, 5.6)
(9) Badanie obrazów zbiorów przy pewnych, zadanych z góry przekształceniach (np. przy homografiach) (Krzyż: 1.6, i drugi rozdział). W pewnych przypadkach może pomóc program `homografie` dostępny na mojej stronie.

4. Punktacja

Za ćwiczenia można uzyskać 0–30 punktów, za część pisemną egzaminu 70 punktów (zadania punktowane w skali 0–7). Osoby, które uzyskają łącznie nie więcej, niż 25 punktów są automatycznie zwolnione z egzaminu pisemnego. Po egzaminie pisemnym wystawiam ocenę.

Poza wyjątkowymi sytuacjami (mam nadzieję, że sytuacja w punkcie 1 się nie zdarzy), nie planuję możliwości podniesienia oceny o więcej niż 1, bądź obniżenia o więcej niż 0.5. W przypadku dobrego wyniku z egzaminu pisemnego (min 4.) i tragicznego zacięcia się na egzaminie ustnym dopuszczam możliwość jednorazowego przyjścia po raz drugi na egzamin ustny, ale wtedy wymagania będą większe.

Jeszcze nie wiem, jak będzie wyglądał termin zerowy.