Zestaw zadań z Funkcji Analitycznych. Geometria odwzorowań $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

Każde zadanie jest za 5 punktów. Termin oddania: 17 listopada 2008
Zadania można wręczać osobiście, przez kogoś, wkładać do skrytki lub przesyłać elektronicznie
Wcześniejsze oddanie zadań (nawet niektórych) oznacza, że mogą one zostać sprawdzone wcześniej i, w razie jakiś błędów, daje szansę oddania ponownego.

Zadanie 1. Znajdź postać przekształcenia biholomorficznego (dyfeomorfizmu zespolonego) (to znaczy h jest holomorficzne oraz 1 na 1. W przypadku odwzorowań zespolonych wystarcza to, żeby h było odwracalne), który przeprowadza zbiór A na B, gdy

(1) $A = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1, \frac{5}{6}\pi < \operatorname{Arg} z < \pi\}$, $B = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$.
(2) $A = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$, $B = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.
(3) $A = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\} \setminus \{[0,1) \in \mathbb{R}\}$, $B = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re} z < 1\}$.
(4) $A = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Arg} z < \frac{1}{2}\pi\}$, $B = \{z \in \mathbb{C} : 1 < \operatorname{Im} z < 2, \operatorname{Re} z > 0\}$.

Zadanie 2. W następujących krokach, naśladujących metodę z ćwiczeń, wyprowadź wzór na $\cos x$ w postaci iloczynu nieskończonego

1 Wykaż, że $\cos 2nx = Q_n(\sin^2 x)$, dla pewnego wielomianu stopnia n.
2 Znajdź pierwiastki wielomianu Q_n.
3 Zapisując $Q_n(x) = \alpha(1-\beta_1 x)(1-\beta_2 x)\dots(1-\beta_n x)$ wyznacz współczynniki α i β_k.
4 Podstaw $z = 2nx$ i we wzorze $\cos x = Q_n(\sin^2 \frac{x}{2n})$ przejdź z n do nieskończoności.
5 Uzyskany wzór porównaj np. z wzorem 5.6.3 w Krzyżu.

Zadanie 3. To zadanie składa się z kilku części, które są bardzo łatwe.
(a) Znajdź ogólną, możliwie najprostszą, postać homografii zachowującej dysk jednostkowy. Dysk jednostkowy D to zbiór $\{z : |z| < 1\}$. O zachowywaniu dysku przez homografię h mówimy, gdy $h : D \to D$ oraz $h^{-1} : D \to D$.
(b) Wykaż, że homografia zachowuje dwustosunek czterech punktów na płaszczyźnie zespolonej. Dwustosunkiem (*ang. cross-ratio*) liczb z_1, z_2, z_3, z_4 nazywamy wielkość

$$\frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3} \cdot \frac{z_4 - z_3}{z_4 - z_2}.$$

Zadanie 4. Wykaż, że każda nietrywialna homografia ma co najwyżej dwa punkty stałe, tzn. takie, że $h(z_k) = z_k$. Udowodnij, że ∞ jest punktem stałym wtedy i tylko wtedy, gdy h jest przesunięciem (przekształceniem afinicznym typu $z \to az + b$). Ponadto, h ma dokładnie jeden punkt stały z_0 wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje takie $\alpha \neq 0$, że

$$\frac{1}{h(z) - z_0} = \frac{1}{z - z_0} + \alpha,$$

dla wszystkich $z \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Zadanie 5. Znaleźć taki ciąg liczb zespolonych $z_1, z_2, \dots$, że dla każdego $k \geq 1$, całkowitego szereg

$$\sum_n z_n^k$$

jest zbieżny, podczas gdy szereg

$$\sum_n |z_n|^k$$

jest rozbieżny

Zadanie 6 (*, 10pkt w sumie)**.** Dla krzywej γ łączącej dwa punkty z_0 i z_1 należące do $K(0,1)$ (koło o promieniu 1), takiej, że $\gamma \in K(0,1)$ określamy jej długość wzorem

$$l(\gamma) = \int_\gamma \frac{\sqrt{\dot\gamma_x(t)^2 + \dot\gamma_y(t)^2}}{1 - |\gamma(t)|^2} dt.$$

(a) Wykaż, że jeśli $z_0 = 0$ zaś $z_1 = x \in \mathbb{R}$ i $|x| < 1$, to najkrótszą krzywą łączącą 0 i x jest odcinek poziomy. Wtedy jego długość wynosi

$$\frac{1}{2} \log \frac{1 + |x|}{1 - |x|}.$$

Wskazówka: użyj współrzędnych biegunowych w pierwszej części, to łatwiejsze, niż stosowanie ogólnej teorii.

(b) Udowodnij, że homografia (taka, która zachowuje dysk jednostkowy) zachowuje tak określoną długość krzywej, czyli $l(h(\gamma)) = l(\gamma)$.

(c) Ogólnie, wykaż że jeśli $|z_1|, |z_2| < 1$, to najkrótszy odcinek łączący z_1 i z_2 ma długość

$$\frac{1}{2} \log \frac{1 + |z_1 - z_2| \cdot |1 - \bar{z}_2 z_2|^{-1}}{1 - |z_1 - z_2| \cdot |1 - \bar{z}_2 z_2|^{-1}}.$$