DEMENTI

MACIEJ BORODZIK

Zacznijmy od wzoru na laplasjan iloczynu.

Stwierdzenie 1. *Niech $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ lub $\mathbb{C}$). Wtedy*

$$\Delta(fg) = f\Delta g + g\Delta f + 2\langle \nabla f, \nabla g\rangle. \tag{1}$$

Dowód. Oznaczmy przez $(x_1, \dots, x_n)$ zmienne w $\mathbb{R}^n$. Dla dowolnego $j = 1, \dots, n$ mamy

$$\frac{\partial^2 fg}{\partial x_j^2} = f\frac{\partial g}{\partial x_j^2} + g\frac{\partial f}{\partial x_j^2} + 2\frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\partial g}{\partial x_j}.$$

Sumując od $j = 1$ do n otrzymujemy tezę. □

Następny wynik prawdziwy jest dla $\mathbb{R}$, ale nie dla $\mathbb{C}$.

Stwierdzenie 2. *Jeśli $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ jest harmoniczna i f^2 jest harmoniczna, to f jest stała.*

Dowód. Piszemy ze wzoru (1)

$$0 = \Delta f^2 = 2f\Delta f + \langle \nabla f, \nabla f\rangle = ||\nabla f||^2.$$

Stąd $||\nabla f|| = 0$, więc $\nabla f = 0$, czyli f jest stała. □

Wynik **nie** zachodzi, gdy rozpatrujemy funkcje w $\mathbb{C}$. Istotnie, $\langle \nabla f, \nabla f\rangle$ nie musi być dodatnie. Co więcej mamy następujący fakt.

Stwierdzenie 3. *Niech $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ będzie holomorficzna, wtedy $\langle \nabla f, \nabla f\rangle = 0$.*

Dowód. Zapiszmy $f = a + bi$, gdzie a i b są rzeczywiste. Wtedy

$$\begin{aligned}\langle \nabla f, \nabla f\rangle &= \left(\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial x}i\right)^2 + \left(\frac{\partial a}{\partial y} + \frac{\partial b}{\partial y}i\right)^2 = \\ &= \left(\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial x}i\right)^2 + \left(\frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial x}i\right)^2 = 0.\end{aligned}$$

W drugiej linijce zamieniliśmy pochodne po y na pochodne po x korzystając z równań Cauchy'ego–Riemanna $\frac{\partial a}{\partial x} = \frac{\partial b}{\partial y}$ oraz $\frac{\partial a}{\partial y} = -\frac{\partial b}{\partial x}$. □

Co zaś się tyczy funkcji $|f(z)|$ gdy f jest holomorficzna. Weźmy sobie $f(z) = z$. Wtedy $|f|^2 = x^2 + y^2$ ($z = x + yi$), więc $\Delta|f|^2 = 2 \neq 0$. Z drugiej strony

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{x^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}}.$$

Stąd $\Delta|z| = 1/|z| \neq 0$.

Wniosek 1. Gdy $|f|$ jest holomorficzna, to na ogół ani $|f|$ and $|f|^2$ nie są harmoniczne.

Za to zachodzi następujący fakt.

Stwierdzenie 4. *Niech $\alpha \neq 0$ i f holomorficzna. Wtedy*

$$\Delta|f|^{2\alpha} \geq 0,$$

a więc $|f|^{2\alpha}$ jest subharmoniczna.

Dowód. Oznaczmy $g = f^\alpha$.

$$\begin{aligned}\Delta|f|^{2\alpha} =& \partial\bar{\partial}(g\bar{g}) = \bar{g}\partial\bar{\partial}g + \partial g\bar{\partial}\bar{g} + \partial\bar{g}\bar{\partial}g + g\bar{\partial}\partial\bar{g} = \partial g \cdot \bar{\partial}\bar{g} = \\ &= \alpha^2 f^{\alpha-1}\bar{f}^{\alpha-1}\partial f\bar{\partial}\bar{f} = \alpha^2|f|^{2\alpha-2}|\partial f|^2.\end{aligned}$$

Skorzystaliśmy tutaj z faktu, że $\overline{\partial f} = \bar{\partial}\bar{f}$, który pozostawiamy do sprawdzenia. □