NOTATKI O POTOKU RICCIEGO NA POWIERZCHNIACH.

MACIEJ BORODZIK

1. Cel

Udowodnić następujące

Twierdzenie 1 (o uniformizacji)**.** *Niech M będzie zwartą zorientowaną powierzchnią bez brzegu. Wtedy każda metryka na M jest konforemnie równoważna metryce o stałej krzywiźnie (skalarnej).*

Wiadomo, że całka po M z krzywizny jest równa charakterystyce Eulera M wymnożonej przez 2π (Gauss–Bonnet). A zatem, na sferze istnieje metryka o stałej krzywiźnie dodatniej, na torusie o stałej krzywiźnie 0, na powierzchniach wyższych genusów o stałej krzywiźnie ujemnej. Mnożąc metrykę przez stałą, można zagwarantować, że krzywizna ta jest równa odpowiednio $+1$, 0 i -1.

Zastosowaniem tego twierdzenia jest, po pierwsze takie, że daje równoważność pomiędzy strukturami zespolonymi na powierzchni a metrykami o stałej krzywiźnie. To pozwala na stosowanie metod metrycznych w analizie zespolonej, lub metod zespolonych w geometrii różniczkowej. W szczególności pozwala na klasyfikację wszystkich struktur zespolonych na powierzchni Riemanna.

Przykład 1. Lemat Schwarza można sformułować następująco: niech $f : X \to X$ będzie holomorficznym odwzorowaniem powierzchni zespolonych o krzywiźnie Gaussa mniejszej, bądź równej -1. Wtedy f jest kontrakcją, tzn. $||df|| \leq 1$ (to się nazywa lematem Schwarza–Ahlforsa–Picka). W szczególności, biorąc za X dysk jednostkowy z metryką hiperboliczną (o krzywiźnie -1) uzyskujemy standardowy lemat Schwarza.

2. Definicje

Niech M będzie gładką rozmaitością zorientowaną bez brzegu, wymiaru n. Lokalne współrzędne na M będziemy oznaczali $(x_1, \dots, x_n)$. Wektory styczne odpowiadające $(x_1, \dots, x_n)$ będą oznaczane przez $(e_1, \dots, e_n)$, albo przez $(\frac{\partial}{\partial 1}, \dots, \frac{\partial}{\partial n})$. To drugie oznaczenie sugeruje, że wektory styczne to różniczkowania. Baza przestrzeni form różniczkowych to, oczywiście $(dx_1, \dots, dx_n)$.

Pole wektorowe X na M działa na funkcji $f : M \to \mathbb{R}$ poprzez branie pochodnej kierunkowej. To działanie będziemy oznaczać Xf albo $\frac{\partial}{\partial X} f$. Ten pierwszy sposób jest preferowany. Zwracam uwagę, że jest to coś innego, niż fX.

Definicja 1. Metryką Riemanna (a. strukturą Riemanna) na n nazywamy wybór, dla każdego $x \in M$ iloczynu skalarnego na $T_x M$. O tym iloczynie skalarnym zakładamy, że jest gładki, to znaczy, jeśli $(x_1, \dots, x_n)$ oznaczają lokalne współrzędne w otoczeniu x_0 tak, że $(e_1, \dots, e_n)$ mogą stanowić bazę wszystkich przestrzeni $T_x M$ dla x bliskich x_0. Wtedy $g_{ij}(x) = \langle e_i, e_j \rangle_x$ (subskrypt x oznacza, że bierzemy iloczyn skalarny w $T_x M$) mają być gładkie.

Od tej pory będziemy mówili, że metryka Riemanna zapisuje się w lokalnych współrzędnych przez g_{ij}, przy czym te ostatnie zależą od punktu.

Metryka Riemanna zadaje długość krzywej gładkiej $\gamma : [0,1] \to M$ wzorem

$$l[\gamma] = \int_0^1 \langle \dot\gamma(t), \dot\gamma(t)\rangle_{\gamma(t)}^{1/2} dt.$$

Jeśli M jest zwarta, albo niezwarta i dostatecznie przyzwoita, metryka Riemanna zadaje odległość na M wzorem

$$\rho(x_1, x_2) = \inf\{l[\gamma] \colon \gamma : [0,1] \to M, \gamma(0) = x_1, \gamma(1) = x_2\}.$$

Definicja 2. Trójkę (E, π, B), gdzie E i B są przestrzeniami topologicznymi, zaś $\pi : E \to B$ jest ciągłym rzutowaniem, nazwiemy *wiązką wektorową* rangi r, jeśli dla każdego $x \in B$ istnieje takie otoczenie otwarte $x \in U \subset B$ oraz izomorfizm $i : \pi^{-1}(U) \simeq U \times \mathbb{R}^r$, nazywany *lokalną trywializacją*. Jeśli $\pi_2 : U \times \mathbb{R}^r \to U$ będzie rzutowaniem, to o i zakładamy, iż $\forall e \in \pi^{-1}(U)$ zachodzi $\pi(e) = \pi_2(i(e))$ (czyli i jest izomorfizmem po włóknach). Ponadto i jest liniowe po drugiej współrzędnej.

Definicja 3. Niech E będzie wiązką wektorową nad M (wystarczy nam w zupełności wiązka styczna). *Koneksją* albo *pochodną kowariantną* na E nazwiemy operator ∇ o następujących własnościach

1 dla X pole wektorowe i v cięcie wiązki E, $\nabla_X v$ zwraca cięcie wiązki E (pochodną v w kierunku X).
2 dla $f : M \to \mathbb{R}$ gładkiej zachodzi $\nabla_{fX} v = f \nabla_X v$ ($C^\infty(M)$-liniowość).
3 dla $g : M \to \mathbb{R}$ gładkiej zachodzi $\nabla_X gv = g\nabla_X v + X(g)v$ (reguła Leibniza).

Jeśli wybierzemy sobie lokalny układ współrzędnych $(x_1, \ldots, x_n)$ na M i lokalną bazę przekrojów wiązki E, (α_1, α_r), to aksjomaty 1–3 mówią, że koneksja jest lokalnie wyznaczona przez wielkości $\Gamma^\nu_{i\mu}$ (tzw. symbole Christoffela) takie, że

$$\nabla_{e_i} \alpha_\mu = \sum_{\nu=1}^{r} \Gamma^\nu_{i\mu}.$$

Koneksja bardzo przypomina pochodną kierunkową. Ogólnie na wiązkach wektorowych koneksji jest całe mnóstwo: dowolne dwie koneksje różnią się o $1-$formę na M o wartościach w E. Na rozmaitości Riemanna mamy jeden naturalny wybór koneksji na wiązce stycznej

Definicja 4. Koneksją Levi-Civity (albo koneksją riemannowską) na TM nazwiemy taką koneksję, która spełnia dodatkowo dwa warunki

(a) $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$ (beztorsyjność).
(b) $X\langle Y, Z\rangle = \langle Y, \nabla_X Z\rangle + \langle \nabla_X Y, Z\rangle$ (metryczność).

Ćwiczenie 1. Na każdej rozmaitości Riemannowskiej istnieje dokładnie jedna koneksja Levi-Civity.

Ćwiczenie 2. Zapisać symbole Christoffela koneksji Levi-Civity.

Niech $\gamma : [0,1] \to M$ będzie krzywą. Powiemy, że pole wektorowe v na γ (czyli wektory styczne do M na γ) jest *równoległe*, jeśli

$$\nabla_{\dot\gamma} v = 0.$$

Jeśli $x = \gamma(0)$ oraz $v_0 \in T_x M$, to istnieje dokładnie jedno pole v na γ równoległe, takie, że $v(0) = v_0$ (trywialny wniosek z tw. o istnieniu rozwiązania równania różniczkowego zwyczajnego). Niech $y = \gamma(1)$. Wtedy $v(1) \in T_y M$. Odwzorowanie $v(0) \to v(1)$, a więc $T_x M \to T_y M$ nazywamy *przesunięciem a. transportem równoległym* wzdłuż krzywej γ. Sytuacje, w których to przesunięcie nie zależy od drogi, należą do wielkich rzadkości (krzywizna musi znikać).

Jeśli krzywa γ spełnia $\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = 0$, czyli jest równolegle przesunięta względem niej samej, to taką krzywą nazwiemy *geodezyjną*. Ta definicja zgadza się z definicją przez minimalizację długości.

Definicja 5. *Formą krzywizny* metryki R nazwiemy nazwiemy $2-$formę o wartościach w $End(TM)$ zadaną wzorem

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z.$$

Ćwiczenie 3. Wykazać, że R jest w istocie $C^\infty(M)$-liniowe to znaczy

$$R(X,Y)(fZ) = fR(X,Y)Z.$$

Niech X i Y będą wektorami w T_xM. Wypuszczamy z x geodezyjną w kierunku X i idziemy nią przez czas $t \ll 1$ aż do punktu x_1. W $T_{x_1}M$ mamy wektory X, Y przesunięte wzdłuż tej geodezyjnej. Potem z x_1 idziemy po geodezyjnej w kierunku Y przez czas $s \ll 1$ do x_2. Wracamy w kierunku $-X$ do x_3 przez czas t i potem przez czas s wzdłuż $-Y$ aż do x_4. Okazuje się (sprawdzić), że beztorsyjność metryki gwarantuje, iż $x_4 = x_0$. Przesunięcie równoległe wzdłuż całej krzywej złożonej z 4 kawałków zadaje odwzorowanie $P(X,Y) : T_xM \to T_xM$. Wtedy $P(X,Y) = tsR(X,Y) + \ldots$ i $R(X,Y)$ jest rzeczonym operatorem krzywizny. Formę krzywizny można wyrażać za pomocą liczb R^l_{ijk} takich, że

$$R(e_i, e_j)e_k = \sum R^l_{ijk} e_l.$$

Ćwiczenie 4. Wyrazić R^l_{ijk} przez symbole Christoffela

Na dowolnej wiązce można wykonać tę samą definicję. Wtedy R jest dwuformą o wartościach w $End(E)$. Inną manifestacją formy krzywizny jest operator krzywizny zadany wzorem

$$R(X,Y,U,V) = \langle R(X,Y)U, V\rangle.$$

Ćwiczenie 5. Wykazać, że zachodzą symetrie

1 $R(X,Y,U,V) = -R(Y,X,U,V)$;
2 $R(X,Y,U,V) = -R(X,Y,V,U)$;
3 $R(X,Y,U,V) = R(U,V,X,Y)$.

Ogólnie dla wiązki wektorowej, w lokalnej trywializacji $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$, krzywiznę można rozpatrywać jako macierz $\Omega = \{\Omega_{\mu\nu}\}$ o wymiarze $r \times r$, której elementami są dwuformy na M. Wtedy dla dwóch pól wektorowych X i Y możemy rozpatrywać endomorfizm $\Omega(X,Y)$ działający z włókna wiązki w siebie. Czyli, jeśli $U = \sum u_\mu \alpha_\mu$, to

$$R(X,Y)U = \sum_{\mu,\nu} \Omega_{\mu\nu}(X,Y) \cdot u\mu.$$

Zmiana lokalnej trywializacji powoduje zmianę macierzy Ω na macierz sprzężoną. W związku z tym wielomiany symetryczne (ślad, wyznacznik itd.) nie zależą od trywializacji. Niech c_1, c_2, $\ldots$, c_r będą wielomianami charakterystycznymi (z dokładnością do unormowania c_1 ślad, c_r wyznacznik). c_k jest $2k$ formą różniczkową na M.

Załóżmy teraz, że E będzie wiązką zespoloną. c_k jest wtedy $2k-$formą zespoloną. Zależy ona wyłącznie od wyboru koneksji na E. Okazuje się (ćwiczenie), że zmiana koneksji zmienia formę na formę różniącą się o formę dokładną. Ponadto $dc_k = 0$. Stąd klasa kohomologii $[c_k] \in H^{2k}(M, \mathbb{C})$ jest dobrze określona. Te klasy nazywa się *klasami Cherna* wiązki wektorowej. Są to niezmienniki mówiące o tym, jak bardzo dana wiązka różni się od wiązki trywialnej. W szczególności można rozpatrywać te klasy dla wiązki TM, pod warunkiem, że jest to wiązka zespolona. Mówimy wtedy o klasach Cherna rozmaitości.

Z krzywizny można wyciągnąć wiele lokalnych niezmienników rozmaitości. Niech wpierw X i Y rozpinają przestrzeń dwymiarową w T_xM.

Definicja 6. *Krzywizną sekcyjną* rozmaitości M w kierunkach X, Y nazwiemy wielkość

$$\sec(X,Y) = \frac{\langle R(Y,X)X, Y\rangle}{\langle X,X\rangle\langle Y,Y\rangle - \langle X,Y\rangle^2}.$$

Wyrażenie w mianowniku jest kwadratem pola równoległoboku rozpiętego przez X i Y. W ten sposób, łatwo widać, że $\sec(X, Y)$ zależy wyłącznie od płaszczyzny rozpiętej przez X i Y a już nie od wyboru konkretnej bazy przestrzeni. Jeśli weźmiemy sobie punkt $x_0 \in M$ oraz powierzchnię Σ rozpiętą przez wszystkie geodezyjne wychodzące z x_0 o kierunkach $sX + tY$, to krzywizna sekcyjna jest zwykłą krzywizną Gaussa powierzchni Σ w x_0. W szczególności zachodzi lemat Gaussa: jeśli T jest trójkątem na Σ, którego boki są geodezyjnymi, to suma kątów wewnętrznych w T jest równa $\pi + \int \sec$. Na przykład jedna ósma sfery dwuwymiarowej ma sumę kątów wewnętrznych $\frac{3}{2}\pi$.

Przykład 2. Jeśli ϕ będzie funkcja gładką z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}^+$, to na $S^{n-1} \times \mathbb{R}$ możemy rozpatrzeć metrykę $g = dr^2 + \phi(r)^2 g_{S^{n-1}}$. Jest to metryka sferycznie symetryczna. Wtedy, w kierunku radialnym (tzn. dla płaszczyzn zawierających wektor $\frac{\partial}{\partial r}$) mamy $\sec = -\frac{\phi''}{\phi}$, podczas gdy w kierunku sferycznym $\sec = \frac{1-\phi'^2}{\phi^2}$. W szczególności, rozpatrzmy Niech

$$s_k(r) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{k}} \sin(r\sqrt{k}) & k > 0; \\ r & k = 0; \\ \frac{1}{\sqrt{|k|}} \sinh(r\sqrt{|k|}) & k < 0. \end{cases}$$

Wtedy, kładąc $\phi = s_k$ uzyskujemy rozmaitość o stałej krzywiźnie sekcyjnej równej k. W szczególności krzywizna Ricciego (ob. niżej) jest równa $(n-1)k$.

Definicja 7. Krzywizną Ricciego rozmaitości nazwiemy ślad R. Ściślej, jeśli $(e_1, \ldots, e_n)$ jest bazą ortonormalną T_xM (niekoniecznie pochodzącą od lokalnego układu współrzędnych), to

$$\mathrm{Ric}(v, w) = \sum_{i=1}^{n} R(e_i, v, w, e_i).$$

Ćwiczenie 6. Udowodnij, że jeśli v jest wektorem jednostkowym, oraz $e_2, \ldots, e_n$ dopełniają v do bazy ortonormalnej, to

$$\mathrm{Ric}(v, v) = \sum_{i=2}^{n} \sec(v, e_i).$$

Niech teraz jeszcze krzywizna skalarna R będzie określona jako suma

$$R = \sum_{i=1}^{n} R(e_i, e_i).$$

Ćwiczenie 7. Wykaż, że jeśli $n = 2$, to $\mathrm{Ric}(v, v) = \frac{R}{2} g(v, v)$. Oraz $\frac{R}{2} = \sec(e_1, e_2)$ jest po prostu krzywizną Gaussa.

O krzywiźnie Ricciego można myśleć jako o przekształceniu liniowym

$$\mathrm{Ric}(v) = \sum_{i=1}^{n} R(v, e_i) e_i.$$

Definicja 8. Powiemy, że $\mathrm{Ric} \geq k$ (albo $\mathrm{Ric} \leq k$), jeśli wszystkie wartości własne Ric są $\geq k$. Jeśli $\mathrm{Ric}(v, w) = kg(v, w)$, to powiemy, że M jest rozmaitością Einsteina ze stałą k.

3. Twierdzenia

Intuicji o krzywiźnie Ricciego można nabyć studiując różne ciekawe twierdzenia.

Twierdzenie 2 (Myers, 1944)**.** *Niech M będzie zupełną rozmaitością taką, że dla pewnego k $\mathrm{Ric} \geq (n-1)k > 0$ (niezależnie od punktu). Wtedy średnica M jest mniejsza od $\pi/\sqrt{k}$. W szczególności M jest zwarta. Ponadto M ma zwartą uniwersalną nakrywającą. W szczególności $\pi_1(M)$ jest skończona.*

Twierdzenie 3 (Bishop)**.** *Niech M będzie zupełna z $\mathrm{Ric} \geq (n-1)k$. Niech też $v_k(r)$ będzie objętością kuli o promieniu r w jednospójnej przestrzeni o stałej krzywiźnie sekcyjnej równej k. Wtedy $\forall p \in M$*

$$r \to \frac{Vol(B(p,r))}{v_k(r)}$$

jest nierosnącą funkcją od r. W szczególności, jeśli $\mathrm{Ric} \geq 0$, funkcja

$$\frac{1}{r^n} Vol(B(p,r))$$

jest nierosnąca.

Twierdzenie 4. *Na rozmaitości M o ujemnej krzywiźnie Ricciego nie istnieją takie pola wektorowe X, że $L_X g = 0$ (inaczej mówiąc, których jednoparametrowa grupa dyfeomorfizmów jest izometriami). W szczególności, takie rozmaitości nie mają nietrywialnych infinitezymalnych izometrii.*

Ćwiczenie 8. Wywnioskuj z powyższego twierdzenia i twierdzenia o uniformizacji, że powierzchnie genusu $g > 1$ mają dyskretną grupę automorfizmów zespolonych.

Twierdzenie 5. *Istnieje taki układ współrzędnych (dokładnie, są to współrzędne geodezyjne), że forma objętości ma rozwinięcie*

$$d\mu_g = \left[1 - \frac{1}{6} \sum_{i,j=1}^{n} \mathrm{Ric}(e_i, e_j) x_i x_j + O(x^3) \right] d\mu_{Lebesgue}.$$

W szczególności, jeśli weźmiemy geodezyjną w kierunku ξ i mały stożek w otoczeniu tej geodezyjnej, to jego objętość będzie mniejsza (ew. większa), niż objętość analogicznego stożka euklidesowego, zależnie od tego, czy $\mathrm{Ric}(\xi, \xi) > 0$, czy $\mathrm{Ric}(\xi, \xi) < 0$.

4. Konforemna zamiana metryki

Definicja 9. Dwie metryki $\tilde{g}$ i g nazwiemy *konforemnie równoważnymi*, jeśli istnieje taka funkcja $\phi : M \to \mathbb{R}$, że

$$\tilde{g} = e^{2\phi} g.$$

Stwierdzenie 1. *Dla $n = 2$ mamy następujące wzory*

$$\tilde{\mathrm{Ric}}_{ij} = \mathrm{Ric}_{ij} + \Delta\phi g_{ij}$$
$$\tilde{R} = e^{-2\phi}(R - 2\Delta\phi),$$

gdzie Δ jest laplasjanem metrycznym.

5. Potok Ricciego na powierzchniach

Potokiem Ricciego na rozmaitości nazwiemy równanie

$$\frac{\partial}{\partial t} g_{ij} = -2 \,\mathrm{Ric}_{ij}.$$

Przykład 3. Sfera $n-$wymiarowa o promieniu r ma krzywiznę Ricciego $\mathrm{Ric}_{ij} = (n-1)r g_{ij}$. Mamy

$$g(t) = (r_0^2 - 2(n-1)t) g_{S^n},$$

jest rozwiązaniem równania Ricciego (g_{S^n} jest metryką na sferze jednostkowej). To rozwiązanie opisuje sferę o promieniu malejącym do zera.

Ćwiczenie 9. Udowodnić, że $g(t)$ jest rozwiązaniem równania Ricciego.

Przykład 4. Przy potoku Ricciego skalarna krzywizna zmienia się zgodnie z równaniem

$$\frac{\partial}{\partial t} R = \Delta R + 2|\operatorname{Ric}|^2.$$

W szczególności, dla $n = 2$ mamy

$$\frac{\partial}{\partial t} R = \Delta R + R^2. \tag{1}$$

Aby uniknąć sytuacji ze sferą ściągającą się do punktu w skończonym czasie, Hamilton rozpatruje równanie

$$\frac{\partial}{\partial t} g_{ij} = 2(\frac{r}{n} g_{ij} - R_{ij}), \tag{2}$$

gdzie r jest średnią krzywizną skalarną, $r = \int R d\mu / \int d\mu$. Gdy $n = 2$ to równanie redukuje się do

$$\frac{\partial}{\partial t} g_{ij} = (r - R) g_{ij}. \tag{3}$$

Ćwiczenie 10. Wyraź r w terminach znanych niezmienników rozmaitości.

Ćwiczenie 11. Wykaż, że pole rozmaitości jest stałe.

Widzimy, że metryka jest zmieniana przez coś, co jest proporcjonalne do niej samej. Stąd równanie (3) zachowuje konforemną klasę metryki. Czyli, dla $n = 2$, potok Ricciego zachowuje konforemną klasę metryki.

Przez analogię do (1) mamy równanie na krzywiznę skalarną, które w przypadku $n = 2$, jest równoważne pełnemu równaniu.

$$\frac{\partial}{\partial t} R = \Delta R + R^2 - rR \tag{4}$$

(równoważność wynika stąd, że dla rozwiązanie równania (3) można zapisać jako $g_{ij}(x,t) = \phi(x,t) g_{ij}(x)$. Wtedy równanie na ϕ wynika ze Stwierdzenia 1.)

To równanie jest nieliniowym równaniem z członem najwyższego rzędu typu parabolicznego.

Ćwiczenie 12. Wykazać, że jeśli $-C \leq R \leq -\varepsilon \leq 0$ dla $t = 0$, to dla wszystkich $t > 0$

$$r e^{-\varepsilon t} \leq r - R \leq C e^{rt}.$$

Czyli ($r < 0$) R dąży wykładniczo do r.

W przypadku krzywizny dodatniej, r jest punktem odpychającym dla równania zwyczajnego $\dot{x} = x(x - r)$ i oszacowanie jest dużo trudniejsze. Potrzebujemy następującej definicji

Definicja 10. Potencjałem f nazwiemy rozwiązanie równania

$$\Delta f = R - r$$

o wartości średniej 0.

Jako, że $\int (R - r) = 0$, potencjał zawsze istnieje.

Ćwiczenie 13. Wykaż, że jeśli g jest gładka i $\int g = 0$, to równanie $\Delta f = g$ ma dokładnie jedno rozwiązanie.

Ćwiczenie 14. Wykaż, że potencjał spełnia równanie

$$\frac{\partial}{\partial t} f = \Delta f + rf - b,$$

gdzie $b = \int |\nabla f|^2 / \int 1$ nie zależy od położenia.

Definiujemy teraz $h = \Delta f + \langle \nabla f, \nabla f\rangle$ oraz $M_{ij} = \{\nabla\nabla f\}_{ij} - \frac{1}{2}\Delta f g_{ij}$. Tutaj ∇f jest gradientem funkcji, zaś drugie ∇ oznacza pochodną kowariantną wektora. Czyli

$$\{\nabla\nabla f\}_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial k} f.$$

Wtedy

$$\frac{\partial}{\partial t} h = \Delta h - 2|M_{ij}|^2 + rh,$$

stąd przez zasadę maksimum dla Δ, dostajemy, że $h \leq Ce^{rt}$. Ale teraz $R = h - |\nabla f|^2 + r$. Stąd

$$R \leq Ce^{rt} + r.$$

Ćwiczenie 15. Wykaż, że jeśli $r < 0$ to dla pewnego t zachodzi $R < 0$. Więc krzywizna zbiega eksponencjalnie do stałej.

6. Rozwiązania

Rozwiązanie zadań 1 i 2. Mamy z (a)

$$\begin{aligned} X\langle Y, Z\rangle &= \langle Y, \nabla_X Z\rangle + \langle \nabla_X Y, Z\rangle \\ Y\langle X, Z\rangle &= \langle X, \nabla_Y Z\rangle + \langle \nabla_Y X, Z\rangle \\ Z\langle X, Y\rangle &= \langle X, \nabla_Z Y\rangle + \langle \nabla_Z X, Y\rangle. \end{aligned}$$

Sumujemy teraz dwa pierwsze i odejmujemy trzecie. Dostajemy

$$\begin{aligned} &X\langle Y, Z\rangle + Y\langle Z, X\rangle - Z\langle X, Y\rangle = \\ &\qquad = \langle Y, \nabla_X Z - \nabla_Z X\rangle + \langle X, \nabla_Z Y - \nabla_Z X\rangle + \langle Z, \nabla_Y X + \nabla_X Y\rangle. \end{aligned}$$

Korzystając z beztorsyjności uzyskujemy

$$\begin{aligned} &2\langle \nabla_X Y, Z\rangle = \\ &\quad = X\langle Y, Z\rangle + Y\langle Z, X\rangle - Z\langle X, Y\rangle - \langle Y, [X, Z]\rangle - \langle X, [Z, Y]\rangle + \langle Z, [X, Y]\rangle. \end{aligned}$$

Jeśli wybierzemy X, Y i Z jako e_i, e_j oraz e_k, uzyskamy wzór

$$2\Gamma_{ij}^k = \frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ik} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij}.$$

□

Odpowiedź do ćwiczenia 4.

$$R_{ijk}^l = \frac{\partial}{\partial x_j}\Gamma_{ik}^l - \frac{\partial}{\partial x_k}\Gamma_{ij}^l + \sum_{s=1}^{n}(\Gamma_{jl}^s \Gamma_{ik}^s - \Gamma_{ks}^l \Gamma_{ij}^s).$$

□

Rozwiązanie zadania 6. Mamy

$$\mathrm{Ric}(v, v) = R(v, v, v, v) + \sum_{i=2}^{n} R(e_i, v, v, e_i) = \sum_{i=2}^{n} \sec(v, e_i).$$

□

Rozwiązanie zadania 9. Łatwo zauważyć, że przeskalowanie metryki przez stałą nie zmienia tensora Ricciego. Stąd, jeśli napiszemy, $g(t) = k(t) g_{S^n}$, dostaniemy równanie $k' = -2(n-1)$ (bo dla standardowej metryki na sferze $\mathrm{Ric}_{ij} = (n-1)g_{ij}$). □

Rozwiązanie zadania 10. Z twierdzenia Gaussa–Bonneta $\int R\, d\mu = 4\pi\chi(M)$. Stąd $r = 4\pi\chi/vol(M)$. □

Rozwiązanie zadania 11. Wiemy, że $\mu = \sqrt{\det g_{ij}}$ w lokalnych współrzędnych. Stąd $\frac{\partial}{\partial t}\mu = (r - R)\mu$. A więc

$$\frac{\partial}{\partial t}\int d\mu = \int (r - R)\mu = 0.$$

□

Rozwiązanie zadania 12. Niech $R_{max}(t) = \max\{R(t)(x)\colon x \in M\}$. Jako, że Δ jest operatorem eliptycznym, tam gdzie $R = R_{max}$ mamy $\Delta R \leq 0$. Stąd

$$\dot{R}_{max} \leq R_{max}(R_{max} - r) \leq -\varepsilon(R_{max} - r).$$

Analogicznie mamy oszacowanie na R_{min}. Dalszy ciąg idzie z Gronwalla.

Alternatywnie możemy zastosować zasadę maksimum dla równania parabolicznego. □

Rozwiązanie zadania 13. Niech ϕ będzie funkcją próbna z $W_0^{1,2}(M)$, gdzie 0 oznacza, że bierzemy funkcje o wartości średniej 0. Równanie $\Delta f = g$ oznacza, że $\int \langle \nabla f, \nabla \phi\rangle = -\int \phi g$. Teraz, dzięki temu, że wartości średnie są równe 0 wiemy, że $\int \langle \nabla f, \nabla \phi\rangle$ szacuje się obustronnie przez iloczyn skalarny w $W_0^{1,2}$ (nie jest to prawdą, gdy wartość średnia f jest duża. Z drugiej strony prawa strona jest funkcjonałem liniowym ciągłym na $W_0^{1,2}$ i lecimy z tw. Riese'a o reprezentacji (ew. z tw. Laxa-Milgrama). Dla pokazania regularności f musimy użyć mocniejszych narzędzi. □

Rozwiązanie zadania 14. Różniczkując zależność $\Delta f = R - r$ po t otrzymujemy

$$\Delta \frac{\partial}{\partial t} f = \Delta(\Delta f + rf).$$

Stąd różnica $\frac{\partial}{\partial t} f - \Delta f - rf$ jest funkcją harmoniczną na M, a więc jest stała. Łatwo widzieć, że musi to być takie b, jak wyżej. □