Zestaw zadań z Analizy Zespolonej. 1/3. *Każde zadanie jest za 5 punktów.*
Termin oddania: 4 maja 2008
Zadania można wręczać osobiście, przez kogoś, wkładać do skrytki, przesyłać elektronicznie, sfotografować (byle dobrze) i przesłać jpeg, (albo inny sensowny format), w ostateczności wsuwać pod drzwi pokoju 5460.

Zadanie 1 (lemat Schwarza)**.** Niech $||\cdot||_1$ i $||\cdot||_2$ będą dwiema normami w $\mathbb{C}^n$, zaś B_1 i B_2 kulami jednostkowymi w tych normach.

Przypuśćmy, że $F : B_1 \to B_2$ jest holomorficzne oraz $F(0) = 0$. Wykaż, że dla wszystkich $z \in B_1$ zachodzi

$$||F(z)||_2 \leq ||z||_1.$$

Zadanie 2 (funkcja modułowa)**.** Niech T będzie obszarem określonym równaniami

$$0 < \operatorname{Re} z < 1, \ \operatorname{Im} z > 0, \ |z - \frac{1}{2}| > \frac{1}{2}.$$

Niech F będzie odwzorowaniem biholomorficznym T na górną półpłaszczyznę, przedłużającym się do ciągłego na brzeg. (Istnienie F wynika z twierdzenia Riemanna o odwzorowaniu konforemnym).

(a) Wykaż, że można wybrać takie F, że $F(\{\infty, 0, 1\}) = \{0, 1, \infty\}$.
(b) Udowodnij, z zasady odbicia, że F można rozszerzyć do odwzorowania $\tilde{F}$, określonego na całej górnej półpłaszczyźnie, którego obrazem jest cała płaszczyzna $\mathbb{C}$ bez punktów 0 i 1.

Zadanie 3 (twierdzenie Picarda)**.** (a) Niech g będzie funkcją całkowitą, która nie przyjmuje wartości 0 ani 1. Udowodnij, że g jest stała. Wskazówka: rozważ funkcję $z \to F^{-1}(g(z))$ z poprzedniego zadania.
(b) Niech B^* oznacza dysk jednostkowy bez zera. Przypuśćmy, że $f : B^* \to \mathbb{C}$ jest holomorficzna oraz istnieje takie r, że na zbiorze $B^* \cap B(0, r)$ funkcja f nie przyjmuje wartości 0 i 1. Wykaż, że f ma w zerze osobliwość usuwalną, albo biegun.

Zadanie 4 (grupy zespolone)**.** Niech $U(n)$ będzie grupą macierzy zespolonych $n \times n$ zachowujących iloczyn hermitowski.

(a) Wykaż, że $A \in U(n)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $A^*A = Id$, gdzie A^* oznacza transpozycję i sprzężenie zespolone.
(b) Wykaż, że $U(n)$ działa tranzytywnie na S^{2n-1} i znajdź podgrupę izotropii.
(c) Wykaż, że $U(n)$ jest zwarta.
(d)* Oblicz grupy kohomologii $U(n)$. Jedna z metod: zastosuj ciąg spektralny do punktu (b).
(e) Wykonaj podpunkty (b), (c) i (d) dla grupy $SU(n)$ macierzy unitarnych o wyznaczniku 1.
(f) Wykaż, że $SU(2) = Spin(3) = S^3$ nakrywa $SO(3)$ z krotnością 2.

Zadanie 5. Wykaż, że przestrzeń ilorazowa $U(n+k)/U(n) \times U(k)$ jest analitycznie równoważna Grassmanianowi $G(k, n+k)$.

Zadanie 6 (jądro Martinelliego–Bochnera)**.** Niech $\zeta \in \mathbb{C}^n$. Rozważmy w $\mathbb{C}^n \setminus \{\zeta\}$ formę różniczkową typu $(n, n-1)$ zadaną przez

$$\omega_\zeta = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \sum_{j=1}^{n} (-1)^j \frac{\bar{z}_j - \bar{\zeta}_j}{|z - \zeta|^{2n}} d\bar{z}_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{d\bar{z}_j} \wedge \ldots d\bar{z}_n \wedge dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n.$$

(a) Niech $\zeta = 0$, oraz

$$\rho = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \frac{1}{||z||^{2n}} d\bar{z}_1 \wedge \cdots \wedge d\bar{z}_n \wedge dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n,$$

zaś $e = \sum \bar{z}_j \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}$. Wykaż, że ω jest zwężeniem ρ o wektor e.

(b) ω_ζ jest zamknięta.

(c) Dla $S = \{z : ||z - \zeta|| = r\}$ mamy $\int_S \omega_\zeta = 1$.

(d) Niech U będzie obszarem ograniczonym z kawałkami gładkim brzegiem, zaś $f : \partial U \to \mathbb{C}$ będzie ciągła. Dla $\zeta \in U$ określamy

$$G(\zeta) = \int_{\partial U} f(z)\omega_\zeta(z).$$

Wykaż, że G jest harmoniczna, ale niekoniecznie holomorficzna.

(e) (twierdzenie Martinelliego–Bochnera) Niech U będzie jak w punkcie (d). Przypuśćmy, że $f : \bar{U} \to \mathbb{C}$ jest ciągła i holomorficzna we wnętrzu U. Wtedy dla wszystkich ζ zachodzi

$$f(\zeta) = \int_{\partial U} f(z)\omega_\zeta(z).$$

Zadanie 7 (twierdzenie Severiego)**.** Niech D będzie otwartym ograniczonym zbiorem w $\mathbb{C}^n$ o spójnym dopełnieniu i gładkim brzegu. Niech $f : \partial D \to \mathbb{C}$ będzie klasy C^1. Wykaż, że następujące warunki są równoważne

(a) Istnieje $g : \bar{D} \to \mathbb{C}$ klasy C^1, holomorficzna w D taka, że $g|_{\partial D} = f$;

(b) jeśli $dz = dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n$, to $df \wedge dz|_{\partial D} = 0$ tożsamościowo na ∂D.

Wskazówka: w implikacji z (b) do (a) użyj teorii Martinelliego–Bochnera. Co mówi to twierdzenie, gdy D jest kołem jednostkowym w $\mathbb{C}$?