Pierwszy zestaw zadań z Analizy II.

Termin oddania zadań: piątek, 28 listopada 2005, przed 12:00

ZADANIE 1. Znajdź odwzorowanie Φ, które przeprowadza płaszczyznę $\mathbb{R}^2$ na elipsoidę w $\mathbb{R}^3$, której ramiona mają długość odpowiednio 3, 4 i 5. Znajdź równanie płaszczyzny stycznej do tej elipsy w punkcie $(x, y, z) = (\frac{7}{3}, \frac{20}{9}, \frac{5}{9}\sqrt{7})$. Znajdź punkty, w których odwzorowanie Φ jest zdegenerowane (tzn. różniczka $D\Phi$ nie jest maksymalnego możliwego rzędu).

ZADANIE 2. Dane są dwie powierzchnie S_1 i S_2 zadane równaniami $7x^4 + y^4 - z^3 = 0$ i $2x^7 + 2y^9 + z^2 = 0$. Punkt $P = (-1, -1, 2)$ należy do krzywej C, będącej przecięciem tych powierzchni. Znajdź prostą styczną do C w punkcie P.

ZADANIE 3. Niech $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ będzie zadane wzorem $f(x, y, z) = (\ln(x+y+1), \cos^3(x-y^2z), \sin(z^3)x)$. Niech $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ będzie zadane wzorem $g(s, t, u) = -u^2zw^3$. Oblicz pochodną złożenia $h = g \circ f$ w punkcie $(1, 0, \sqrt[3]{\frac{\pi}{2}})$.

ZADANIE 4. Naszkicować poziomice (kilka istotnych) funkcji $f(x, y) = y^2 + 4y - x^3 + 6x+2$. Która poziomica jest krytyczna? (tzn. należy do niej punkt, w którym $\nabla f = 0$). Znajdź wektor styczny do poziomicy w punkcie $(2, 3)$.

ZADANIE 5. Dane jest przekształcenie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ zadane wzorem $f(x, y) = (x^3 + 3xy - 2x + 4, \frac{3}{2}x^3 + 6x^2 + 2xy + 6)$. Znajdź zbiór punktów $\Sigma \subset \mathbb{R}^2$ w obrazie, taki że f nie jest lokalnie odwracalne na Σ. Znajdź macierz pochodnej funkcji f^{-1} w punkcie $f(1, 1)$.

ZADANIE 6. *(**)* Udowodnij, że dla S — powierzchni genusu 2 (obwarzanek z dwiema dziurkami) istnieje takie odwzorowanie f z $\mathbb{R}^2$ na S, które jest lokalnym dyffeomorfizmem w każdym punkcie.