Zestaw zadań z Analizy II.

Należy wybrać i zgłosić jedno zadanie (podpunkt) i zrobić je przy tablicy.

Zadanie 1. Rozpatrujemy w $\mathbb{R}^2$ bazę 1−form $dz = dx + idy$ oraz $d\bar{z} = dx - idy$. Niech $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ będzie funkcją różniczkowalną. Wykaż, że zamkniętość formy $f(x, y)dz$ jest równoważna holomorficzności funkcji f. Forma jest zamknięta jeśli $d\omega = 0$.

Zadanie 2. Wykorzystaj zadanie 1 do wyprowadzenia wzoru całkowego Cauchy'ego.

Zadanie 3. Rozpatrzmy operator gwiazdkowy Hodge'a działający na 2-formach w $\bigwedge^2 \mathbb{R}^4$. Wiadomo, że $*$: $\bigwedge^2 \mathbb{R}^4 \to \bigwedge^2 \mathbb{R}^4$ jest przekształceniem liniowym. Znajdź wektory własne i wartości własne tego przekształcenia.

Przypomnienie: jeśli jest wybrana baza $v_1, \ldots, v_n$ przestrzeni V^*, to na k-formach postaci $u = v_{i_1} \wedge \ldots v_{i_k}$ operator $*$ daje taką $n-k$ formę $w = v_{j_1} \wedge \cdots \wedge v_{j_{n-k}}$, że $u \wedge v = v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_n$.

Zadanie 4. Rozpatrujemy torus $T = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. Znajdź na torusie dwie liniowo niezależne formy ω_1 i ω_2 takie, że $d\omega_1 = d\omega_2 = 0$, ale nie istnieją funkcje f_1 ani f_2 takie, że $\omega_1 = df_1$ i $\omega_2 = df_2$.

Wskazówka: tak jak funkcja na torusie może zostać opisana przez funkcję dwuokresową dwóch zmiennych $f(x, y)$ (tj. $f(x + 1, y) \equiv f(x, y + 1) \equiv f(x, y)$) podobnie jest z formami.

Zadanie 5. Niech M będzie rozmaitością a ω zamkniętą 1-formą na M, przy czym dla każdej krzywej zamkniętej $\int_\gamma \omega = 0$. Wykaż, że ω jest dokładna.

Zadanie 6. Dla następujących 1-form ω znajdź funkcję f taką, że $\omega = df$.

(a) $\omega = \frac{y}{x}(\ln x)^{y-1}dx + [(\ln x)^y(\ln y) + 6 \sin y]dy$, gdy $x > 1$

(b) $\omega = (4x^3 + 5y^3)dx + (15xy^2 + 12y)dy$

Zadanie 7. Rozpatrujemy formę $\omega = \frac{xdy\wedge dz+ydz\wedge dy+zdx\wedge dy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$. Wykaż, że $d\omega = 0$. Wywnioskuj, że dla powierzchni zamkniętej V takiej, która nie ogranicza zera, $\int_V \omega = 0$. Niech W będzie powierzchnią z brzegiem. Niech R będzie obrazem rzutowania radialnego W na sferę S^2 o promieniu 1 (bierzemy punkt $w \in W$, łączymy go odcinkiem z punktem 0. Odcinek ten przecina sferę S^2 dokładnie w jednym punkcie).

Wskazówka: Spivak.

Zadanie 8. Rozpatrujemy formy w $\mathbb{C}^n$. Bazę form oznaczamy $dz_1, \ldots, dz_n$ i $d\bar{z}_1, \ldots, d\bar{z}_n$ (por. Zadanie 1). Dla funkcji $f(z, \bar{z})$ definiujemy $\partial f = \frac{\partial f}{\partial z_1}dz_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial z_n}dz_n$ i $\bar{\partial} f = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_1}d\bar{z}_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_n}d\bar{z}_n$. Rozszerzamy tę definicję na formy. Jeśli $\omega = f(z, \bar{z})dz_{i_1} \wedge \cdots \wedge dz_{i_k} \wedge d\bar{z}_{j_1} \wedge \cdots \wedge d\bar{z}_{j_l}$ to

$$\partial\omega = \partial f \wedge (dz_{i_1} \wedge \cdots \wedge dz_{i_k} \wedge d\bar{z}_{j_1} \wedge \cdots \wedge d\bar{z}_{j_l}),$$

analogicznie $\bar{\partial}\omega$. Wykaż, że $\partial\partial\omega = 0$, $\bar{\partial}\bar{\partial}\omega = 0$ oraz $d\omega = const(\partial\omega + \bar{\partial}\omega)$.

Uwaga. Jedyne, co w tym zadaniu może sprawiać kłopoty, to notacja, do której trzeba się przyzwyczaić. Otóż $\frac{\partial f}{\partial z_i}$ oznacza tyle, co $\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right)$, zaś $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_i}$, dokładnie $\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right)$. Zbiór $z_1, \ldots, z_n, \bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_n$ to po prostu inny układ współrzędnych od standardowego $x_1, \ldots, x_n$, $y_1, \ldots, y_n$.

Zadanie 9. Niech I będzie przekształceniem, które z 1-formy $adx + bdy + cdz$ na $\mathbb{R}^3$ robi wektor (a, b, c). I^{-1} oznacza przekształcenie odwrotne (robi z wektora 1-formę). $*$ oznacza zwykłą gwiazdkę Hodge'a Wykaż, że

(a) $\nabla f = I(df)$ dla dowolnej funkcji gładkiej f na $\mathbb{R}^3$

(b) $\operatorname{div} v = *d * (Iv)$ dla dowolnego pola wektorowego v.

(c) $\operatorname{rot} v = I^{-1} * d(Iv)$ dla dowolnego pola v.

Zadanie 10. Wyprowadź prawo Archimedesa *„siła wyporu działająca na ciało zanurzone w cieczy jest skierowana pionowo w górę i równa objętości bryły pomnożonej przez gęstość cieczy ρ i stałą grawitacji g"* z prawa Pascala *„siła ciśnienia działająca na element powierzchni jest prostopadła do tej powierzchni i równa ciśnieniu. Ciśnienie jest zaś równe ρgh, gdzie h jest głębokością"* oraz z twierdzenia Stokes'a.

Zadanie 11. Korzystając z oznaczeń z Zadania 9 wyraź całki po krzywej i powierzchni z pól wektorowych przez odpowiednie całki z form. Wyraź twierdzenie Stokesa (dla krzywej w $\mathbb{R}^2$, krzywej w $\mathbb{R}^3$ i powierzchni w $\mathbb{R}^3$ w oznaczeniach z Zadania 9.