

## Zestaw zadań z Analizy II.

Należy wybrać i zgłosić jedno zadanie (podpunkt) i zrobić je przy tablicy 9 maja.

ZADANIE 1. Oblicz całki powierzchniowe:

- (a)  $\int_S z^2 dS$ , gdzie  $S$  jest wycinkiem stożka  $x = r \cos \phi \sin \psi$ ,  $y = r \sin \phi \sin \psi$ ,  $z = r \cos \psi$  i  $0 \leq r \leq a$ ,  $0 \leq \phi \leq 2\pi$  a  $\psi$  jest stała  $0 < \psi < \pi/2$ .
- (b)  $\int \frac{1}{(1+x+y)^2}$ , gdzie całkujemy po brzegu czworościanu zadanego wzorami  $x, y, z \geq 0$  i  $x + y + z \leq 1$ .
- (c)  $\int_S (x^2 - y^2)$ .  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \sqrt{x^2 + y^2}, x^2 + y^2 + z^2 - 2z \leq 0\}$ .
- (d)  $\int_S z$ .  $S = \{z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)\}$ .  $0 \leq z \leq 1$ .

ZADANIE 2. Oblicz całkę  $\int dx \wedge dy + 2z dx \wedge dz$ , gdzie całkujemy po torusie o dużym promieniu  $R$  i małym  $r$ .

ZADANIE 3. Oblicz całki po następujących zbiorach.

- (f)  $\int x + z$ , gdzie całkujemy po zbiorze  $\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x^2 + y^2 = 1, z^2 + w^2 = 2\}$ .
- (g)  $\int_V z^2$ ,  $V = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : w \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1\}$ .
- (h)  $\int_M (x_1^2 + x_3^2 + x_5^2)(dx_1 \wedge dx_2 + dx_1 \wedge dx_3) \wedge (dx_4 \wedge dx_5 \wedge dx_7)$ , gdzie  $M = \{(x_1, \dots, x_7) \in \mathbb{R}^7 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1, x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 + x_7^2 = 4, x_7 \geq 0\}$ .

ZADANIE 4. Oblicz wyznacznik Gramma następującego układu wektorów.

- (i)  $v_1 = (1, 2, 2, 1, 5)$ ,  $v_2 = (1, 3, 4, 1, -1)$ ,  $v_3 = (0, 2, 0, 0, 4)$ .
- (j)  $w_1 = (1, 3, 6, 7, 9, 4)$ ,  $w_2 = (4, 5, 2, 1, -3, 1)$ .

ZADANIE 5. Podane całki po płatach zamień na całki po podzbiorach  $\mathbb{R}^n$ . Całek później nie trzeba obliczać.

- (k)  $\int_M u^3 z^2$ ,  $M = \{(x, y, z, u, w) \in \mathbb{R}^5 : x^3 + y^3 + z^3 + u^3 + w^3 = 1, x^2 + y^2 + z^2 + u^2 + w^2 = 1, x + y + z = 1/2\}$ .
- (l)  $\int_N u + z$ ,  $N = \{(x, y, z, u, w, t) \in \mathbb{R}^6 : x^2 + y + z + u + w + t = 1, x + 2y^2 + z + u + w - 3t = 2, -x - y + 3z^2 + 2u + 3w - t = 0\}$ .