Czwarty zestaw zadań z Analizy II.

Termin oddania zadań: poniedziałek, 10 kwietnia 2006, przed 12:00

Zadanie 1. Stosując wzór Stokesa oblicz pola obszarów ograniczonych krzywymi:

(a) $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$, $t \in [0, 2\pi]$ (asteroida).

(b) $r = 2(1 + \cos\phi)$, $\phi \in [0, 2\pi]$ (kardioida).

(c) $y = x$, $y = \frac{1}{x}$, $y = x/4$ oraz $x > 0$.

Zadanie 2. Oblicz pracę wykonaną w polu sił $F = [y^2, x^2]$, po drodze będącej łukiem elipsy $x^2 + 4y^2 = 4$, $y > 0$. Pracę zaczynamy w punkcie $A = (0, 1)$ i kończymy w $B = (2, 0)$.

Zadanie 3. Wyznacz środek ciężkości jednorodnej krzywej (drut) zadanej wzorem $x = 3(t - \sin t)$, $y = 3(1 - \cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

Zadanie 4. Rozpatrując wzór Stokesa dla formy $\omega = -v\frac{\partial u}{\partial y}dx + v\frac{\partial u}{\partial x}dy$ dla obszaru $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ z gładkim brzegiem $\partial\Omega$ udowodnij następujący wariant wzoru Stokesa:

$$\int_\Omega v\Delta u = -\int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v) + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v,$$

gdzie $\frac{\partial u}{\partial n}$ jest pochodną kierunkową funkcji u wzdłuż wektora normalnego (prostopadłego) do $\partial\Omega$, wychodzącego na zewnątrz, o długości 1 (zadanie wyłącznie rachunkowe).

Zadanie 5. Załóżmy, że mamy drgającą strunę w kształcie zadanym przez obszar Ω, tak że wychylenie struny spełnia równanie $\partial_{tt}u = \Delta u$, $\mathbb{R} \in u = u(x, t)$, $t \in \mathbb{R}$, $x \in \Omega$. Załóżmy ponadto, że brzeg struny $\partial\Omega$ jest podzielony na dwie części: jedna, $\partial\Omega_1$ jest umocowana, to jest $\forall x_1 \in \partial\Omega_1$, $u(x_1, t)$ nie zależy od t. Druga część $\partial\Omega_2$ jest swobodna, to jest $\forall x_2 \in \partial\Omega_2$, $\frac{\partial}{\partial n}u(x_2, t) \equiv 0$. Wykaż, że wielkość $E(t) = E_k(t) + E_p(t)$, gdzie:

$$E_k(t) = \int_\Omega (u'_t)^2, \quad E_p(t) = \int_\Omega (u'_x)^2$$

nie zależy od t. Zastosuj wzór Stokesa z poprzedniego zadania.

Zadanie 6. Oblicz różniczki zewnętrzne następujących form:

(a) $\eta = 2x_1 dx_1 \wedge dx_2 - 3x_2^2 dx_2 \wedge dx_3$.

(b) $\xi = x_1 dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n + x_2 dx_1 \wedge dx_3 \wedge \cdots \wedge dx_n + \cdots + x_n dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{n-1}$.

(c) $\omega = dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4 + \cdots + dx_{2n-1} \wedge dx_{2n}$.

Zadanie 7. Niech $\omega = dy_1 \wedge \ldots dy_n$ będzie $n-$formą na $\mathbb{R}^n$. Niech też $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ będzie dyfeomorfizmem. Wykaż, że $F^*\omega = JF dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$, gdzie JF jest jakobianem F.