Trzeci zestaw zadań z Analizy II.

Termin oddania zadań: poniedziałek, 16 stycznia 2006, przed 12:00

Zadanie 1. Niech $T : [0,1) \to [0,1)$ będzie zadane wzorem $T(x) = 2x - [2x]$, gdzie $[a]$ oznacza część całkowitą liczby a.

(a) Wykaż, że dla każdego $A \subset [0,1)$, A — mierzalny, zachodzi $\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A)$.

(b) Opisz $\sigma-$ciało $T^{-1}\mathcal{M}$, gdzie $\mathcal{M}$ jest $\sigma-$ciałem zbiorów mierzalnych w sensie Lebesgue'a na $[0,1)$.

Zadanie 2. Niech $V = \mathbb{R}^n$ będzie przestrzenią liniową, $v_1, \ldots, v_n$ jej bazą a $e_1, \ldots, e_n$ — bazą dualną. Rozpatrujemy przestrzeń $L_k(\mathbb{R}^n)$ składającą się z funkcjonałów $k-$liniowych antysymetrycznych nad V, czyli spełniających relację:

$$l(a_1, \ldots, a_{i-1}, \mathbf{a_i}, \mathbf{a_{i+1}}, a_{i+2} \ldots, a_k) = -l(a_1, \ldots, a_{i-1}, \mathbf{a_{i+1}}, \mathbf{a_i}, a_{i+1}, \ldots, a_k).$$

(O funkcjonałach takich można myśleć jak o wyznaczniku, który zmienia znak, gdy przestawi się kolumny). Niech $S_k(\mathbb{R}^n)$ będzie przestrzenią liniową funkcjonałów $k-$liniowych z $\mathbb{R}^n$ (oznaczaliśmy ją również $(\mathbb{R}^n)^* \otimes \cdots \otimes (\mathbb{R}^n)^*$).

(a) Wykaż, że L_k jest podprzestrzenią liniową S_k.

(b) Skonstruuj sensowne odwzorowanie z S_k na L_k (uogólniające przekształcenie dla $k = 2$, które funkcjonałowi $s(u,v)$ przypisuje funkcjonał l taki, że $l(u,v) = s(u,v) - s(v,u)$).

(c) Znajdź bazę L_k.

(d) Wykaż, że dla $k > n$ L_k jest pusty oraz $\dim L_k = 1$, gdy $k = n$.

(e) Wykaż, że $L_3(\mathbb{R}^3)$ jest rozpięte przez element l, który na wektorach u, v, w przyjmuje wartość równą wyznacznikowi macierzy utworzonej przez te wektory.

Zadanie 3. Niech $\mathcal{A}$ będzie rodziną multyplikatywną podzbiorów X (to znaczy $A_1, A_2 \in \mathcal{A} \Longrightarrow A_1 \cap A_2 \in \mathcal{A}$). Niech $\mathcal{G}$ będzie rodziną podzbiorów X spełniających następujące warunki:

(0) $\mathcal{A} \subset \mathcal{G}$.

(1) $\emptyset \in \mathcal{G}$

(2) Dla dowolnej przeliczalnej rodziny rozłącznych zbiorów $B_i \in \mathcal{G}$ mamy $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \in \mathcal{G}$.

(3) $B \in \mathcal{G} \iff X \setminus B \in \mathcal{G}$.

Wykaż, że $\mathcal{G}$ zawiera $\sigma-$ciało generowane przez $\mathcal{A}$.

Wskazówka: Rozpatrz rodzinę $\mathcal{G}'$ taką, która spełnia 0—3 i jest najmniejsza spośród spełniających 0—3. Dla elementów $A \in \mathcal{G}'$ rozpatrz rodziny $\mathcal{G}'_A$ będzie podrodziną $\{B \in \mathcal{G}' : A \cap B \in \mathcal{G}'\}$.

Zadanie 4. Niech $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 1 < x^2 + y^2 < 2\} \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x \geq 0, -x \leq y \leq x\}$. Skonstruuj (tzn. przedstaw w postaci złożenia pewnej liczby zadanych jawnym wzorem) dyfeomorfizm między A a półpłaszczyzną $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$.