Zestaw zadań z analizy.

Termin oddania: 17 maja 2010.

Zasady gry:

(1) Zadania mają różne stopnie trudności od trudnych do bardzo trudnych.
(2) W związku z tym zabranie się za zadania 16 maja wieczorem jest gwarancją utknięcia.
(3) Zadania są pomyślane tak, żeby pokrywały wiele zastosowań matematyki i są z wielu jej dziedzin.
(4) Nie oczekuję, że ktoś zrobi wszystkie zadania (3-4 gwarantują maksymalną liczbę punktów z ćwiczeń, pod warunkiem, że nie będą to te same 3 zadania u 20 osób).
(5) Część zadań może być zrozumiała dopiero za 2 wykłady.
(6) Oddanie zadań na conajmniej tydzień wcześniej oznacza, że te zadania sprawdzę i w razie błędów będzie można je poprawić.
(7) Dopuszczalne jest powoływanie się na wyniki znalezione np. w książkach (po to podaję czasem hasła), pod warunkiem podania dokładnej referencji oraz streszczenia w kilku punktach głównej myśli zawartej w referencji.
(8) Dopuszczalna jest praca zespołowa, pytanie się osób ze starszych lat (polecam pokazywanie im zadań i robienie zdjęć z ukrytej kamery). Warunkiem jest *zrozumienie* tego, co się napisało.
(9) Jeśli czyjaś praca nosi ślady niezrozumienia, zastrzegam sobie prawo sprawdzenia (np. przy oddawaniu zadań), czy na pewno *rozumie*, co napisała.
(10) Oddawanie rozwiązań częściowych jest dopuszczalne, skutkuje uzyskaniem części punktów za zadanie,

Zadanie 1 (Hasło: zadanie z poprzednich lat z egzaminu)**.** Znajdź taką krzywą $C \subset \mathbb{R}^2$, gładką i zamkniętą, dodatnio zorientowaną (tzn. wektor styczny i normalny zewnętrzny stanowią orientację dodatnią), żeby całka

$$\int_C (4y^3 - 6xy)dx + (4x - 3x^3)dy$$

była możliwie największa i oblicz tę całkę.

Zadanie 2 (Hasło: zadanie z kolokwium sprzed kilku lat)**.** Niech $S = \{(r, \phi) \in \mathbb{R}^2 : r \leq \cos^3 \phi, \phi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]\}$ będzie podzbiorem w $\mathbb{R}^2$. Oblicz

$$\int_S \frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt{1 - x^{2/3}}}\, x^{-2/3} e^{\arccos \sqrt[3]{x} dx \wedge dy}.$$

Zadanie 3 (Hasło: kohomologie de Rhama)**.** Niech $\omega = \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$ będzie formą na $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Wykaż, że dla dowolnej 1–formy η na Ω takiej, że $d\eta = 0$ istnieje dokładnie jedna stała $a \in \mathbb{R}$, że forma $\omega - a\eta$ jest dokładna, czyli $\omega - a\eta = df$ dla pewnego f. (Oznacza to, że $H^1(\Omega) = \mathbb{R}$).

Zadanie 4 (Hasło: ciąg Meyera–Vietorisa)**.** Dla zbioru otwartego Ω określamy $Z^k(\Omega)$ jako zbiór wszystkich gładkich $k-$form ω na Ω takich, że $d\omega = 0$. Określamy również $B^k(\Omega)$ jako zbiór wszystkich gładkich $k-$form ω takich, że $\exists \eta \colon \omega = d\eta$ (przypominam definicję, która pojawi się/pojawiła się na ćwiczeniach). Określamy $H^k(\Omega) = Z^k(\Omega)/B^k(\Omega)$.

(a) Wykaż, że jeśli dane jest odwzorowanie gładkie $i \colon \Omega_1 \to \Omega$, to $i^* \colon Z^k(\Omega) \to Z^k(\Omega_1)$, $i^* \colon B^k(\Omega) \to B^k(\Omega_1)$;

(b) Wywnioskuj, że $i \colon \Omega_1 \to \Omega$ indukuje odwzorowanie $i^* H^k(\Omega) \to i^* H^k(\Omega_1)$;

(c) Niech $\Omega = U \cup V$, $W = U \cup V$. Włożenia $i_U \colon U \to \Omega$, $i_V \colon V \to \Omega$, oraz $j_U \colon W \to U$, $j_V \colon U \to V$ indukują odwzorowania

$$H^k(\Omega) \stackrel{i_U \oplus i_V}{\longrightarrow} H^k(U) \oplus H^k(V) \quad \stackrel{j_U \oplus -j_V{}^k}{H} \quad (W);$$

(d) Wykaż, że powyższy ciąg jest *dokładny*, to znaczy

$$\ker(j_U \oplus -j_V) = \operatorname{im} i_U \oplus i_V.$$

Zadanie 5 (Hasło: gwiazdka Hodge'a)**.** Torus $T \subset \mathbb{R}^3$ sparametryzowany jest przez

$$\begin{cases} x = (R + r\cos\phi)\cos\lambda \\ y = (R + r\cos\phi)\sin\lambda \\ z = r\sin\phi, \end{cases}$$

gdzie $0 < r < R$. Oblicz $*d\phi$ na T.

Zadanie 6 (Hasło: laplasjan we współrzędnych biegunowych)**.** W $\mathbb{R}^5 \setminus \{0\}$ wprowadzamy współrzędne biegunowe $r, \phi_1, \dots, \phi_4$ wzorem

$$\begin{aligned} x_1 &= r\cos\phi_1 \dots \cos\phi_4 \\ x_2 &= r\cos\phi_1\cos\phi_2\cos\phi_3\sin\phi_r \\ x_3 &= r\cos\phi_1\cos\phi_2\sin\phi_3 \\ x_4 &= r\cos\phi_1\sin\phi_2 \\ x_5 &= r\sin\phi_1. \end{aligned}$$

Dla funkcji $f \colon \mathbb{R}^5 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ wyznacz laplasjan

$$\Delta f = \sum_{k=1}^{5} \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}$$

we współrzędnych biegunowych.

Uwaga. Za to zadanie proszę się zabrać dopiero po wprowadzeniu gwiazdki Hodge'a, inaczej się Państwo zaliczą.

Uwaga 2. Rozwiązania dłuższe niż jedna kartka A4, zawierające błędy rachunkowe lub nieczytelne, będą od razu odrzucane. To nie jest zadanie na rachunki, tylko na algorytm.

Zadanie 7 (Hasło: gradient zależy od metryki)**.** Niech $F\colon U \to V$ będzie dyfeomorfizmem dwóch podzbiorów otwartych $\mathbb{R}^n$. Dla dowolnej funkcji $f\colon V \to \mathbb{R}$ określamy funkcję $g\colon U \to \mathbb{R}$ przez $g(x) = f(F(x))$. Przypuśćmy, że F ma następującą własność: dla tak określonych funkcji f i g zachodzi:

$$DF(\nabla g) = \nabla f$$

Udowodnij, że dla każdego $x \in U$, DF jest macierzą ortogonalną, tzn. $DF \cdot DF^T = Id$.

Zadanie 8 (Hasło: relacje Plückera)**.** Niech V będzie przestrzenią liniową i $\dim V = 4$. Niech $\omega \in \Lambda^2 V$. Wykaż, że następujące warunki są równoważne:

(a) $\omega \wedge \omega \neq 0 \in \Lambda^4 V$;
(b) $\exists v_1, v_2 \in V : \omega = v_1 \wedge v_2$.

Podaj przykład elementu $\omega \in \Lambda^2 V$, dla $\dim V = 5$, dla której $\omega \wedge \omega = 0$, ale nie istnieją takie dwa wektory v_1, v_2 w V, że $\omega = v_1 \wedge v_2$.

Zadanie 9 (Hasło: brak hasła)**.** Dla ustalonego $n > 1$ niech $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ będzie pierwiastkiem odpowiedniego stopnia z jedności.

Niech

$$B_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 & \dots & \varepsilon^{n-1} \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon^4 & \dots & \varepsilon^{2(n-1)} \\ 1 & \varepsilon^3 & \varepsilon^6 & \dots & \varepsilon^{3(n-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 1 & \varepsilon^{n-1} & \varepsilon^{2(n-1)} & \dots & \varepsilon^{(n-1)(n-1)} \end{vmatrix}.$$

Licząc B_n na dwa różne sposoby wykaż, że

$$\iint\limits_{0 \le x \le y \le \pi} \ln|\sin(x-y)|dxdy = -\frac{\pi^2}{2}\ln 2.$$

Zadanie 10 (Hasło: sygnatury węzłów torycznych)**.** Ustalmy dwie liczby względnie pierwsze p i q. Niech

$$\Sigma = \left\{ \frac{k}{p} + \frac{l}{q} \colon 1 \le k \le p-1,\ 1 \le l \le q-1 \right\} \subset (0,2).$$

Dla $x \in [0,1]$ określamy $f(x) = |\Sigma \cap (x, x+1)| - |\Sigma \setminus (x, x+1)|$ ($|\cdot|$ oznacza moc zbioru). Oblicz (to znaczy wyraź przez funkcję wymierną od p i q).

$$\int_0^1 f(x)\, dx.$$

Wskazówka: Zadanie można robić na tysiąc sposobów, najłatwiej może być policzyć $\int f(x)e^{ax}$ dla $a \neq 0$ i przejść w granicy z a do 0.

Zadanie 11 (Hasło: struktury kontaktowe)**.** Niech $\alpha = z - y\,dx$ będzie $1-$formą w $\mathbb{R}^3$. Wykaż, że jeśli zadana jest funkcja $x \to z(x)$, klasy C^1, to dla przekształcenia $I_z \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ zadanego przez $x \to (x, z'(x), z(x))$, to $I_z^* \alpha = 0$.

Udowodnij fakt odwrotny: jeśli dana jest krzywa $M \subset \mathbb{R}^3$, dla której obcięcie formy α jest zerowe, oraz w punkcie $(x_0, y_0, z_0) \in M$ płaszczyzna $x = x_0$ nie jest styczna do M, to istnieje takie otoczenie $U \subset \mathbb{R}$ punktu x_0, oraz funkcja $z \colon U \to \mathbb{R}$, że $z(x_0) = z_0$, $z'(x_0) = y_0$ oraz $\forall x \in U$ zachodzi $(x, z'(x), z(x)) \in M$.