Wykład z Analizy II*
23 lutego 2007
Maciej Borodzik

1. Funkcje maksymalne.

Przypomnijmy wpierw twierdzene Vitaliego o pokryciach z Wykładu 25.

Twierdzenie 1. *Niech $\mathcal{P}$ będzie rodziną Vitalieo ze stałymi r, R, która pokrywa zbiór $A \subset E$. Wówczas istnieje ciąg P_i rozłącznych zbiorów z $\mathcal{P}$ oraz zbiór $C \supset A$ taki, że $\mu(C) \leq R \cdot \mu(\bigcup_i P_i)$.*

Zastosujemy Twierdzenie 1 do badania funkcji maksymalnej.

Definicja 2. *Niech (E, μ) będzie przestrzenią metryczna zwarta z miarą borelowską, zaś $\mathcal{C}$ pewną rodziną Vitaliego pokrywającą E. Dla funkcji $f \in L^1(E, \mu)$ określamy*

$$f^*(x) = \sup_{C \in \mathcal{C}, x \in C} \frac{\int_C f \, d\mu}{\int_C 1 \, d\mu} \tag{1}$$

Funkcję f^* nazywamy funkcją maksymalną *(Hardy'ego–Littlewooda) funkcji f.*

Funkcja maksymalna jest jednym z ważniejszych narzędzi we współczesnej analizie harmonicznej i geometrycznej teorii miary. Poniżej podajemy jej własności nazywane powszechnie Twierdzeniem Hardy'ego–Littlewooda.

Stwierdzenie 3. *Niech A_t będzie zbiorem $\{x \in E : f^*(x) > t\}$. Wtedy $\mu(A_t) \leq const \frac{1}{t} ||f||_{L^1}$.*

Dowód. Dla każdego $x \in A_t$ istnieje taki zbiór $C_x \in \mathcal{C}$, że $x \in C_x$ oraz

$$\int_{C_x} f \, d\mu \geq t\mu(C_x) \tag{2}$$

Wynika to bezpośrednio z definicji zbioru A_t oraz z (1). Rodzina $\{C_x\}_{x \in A_t}$ jest rodziną Vitaliego pokrywającą zbiór A_t. Z Twierdzenia 1 możemy sobie wybrać *rozłączną* podrodzinę C_i, taką, że

$$\mu(A_t) \leq R \sum \mu(C_i) \tag{3}$$

Teraz łączymy nierówność (2) i (3) otrzymując

$$\mu(A_t) \leq R \sum \mu(C_i) \leq \frac{R}{t} \int_{\bigcup C_i} f \, d\mu. \tag{4}$$

Wyrażenie po prawej stronie jest na pewno mniejsze, niż $\int_E |f| \, d\mu$. Stąd otrzymujemy tezę. □

Stwierdzenie 4. *Istnieje uniwersalna stała D, zależąca wyłącznie od R i p, taka że*

$$||f^*||_p \leq D||f||_p \tag{5}$$

Lemat 5. *Jeśli g jest całkowalna w p-tej potędze, oraz $B_t = \{x \in E : |g(x)| > t\}$, to*

$$\int |g|^p \, d\mu = \int_0^\infty pt^{p-1}\mu(B_t)\, d\mu. \tag{6}$$

Dowód lematu. Zauważmy, że $\mu(B_t) = \int_E \mathcal{I}_{|g(x)|>t}$. A zatem

$$\int_0^\infty pt^{p-1}\mu(B_t)\, d\mu = \int_0^\infty \left(pt^{p-1} \int_E \mathcal{I}_{|g(x)|>t}\, d\mu \right) dt =$$

$$= \text{...Fubini...} = \int_E \int_0^{|g(x)|} pt^{p-1}\, dt\, d\mu =$$

$$= \int_E |g(x)|^p \, d\mu$$

□

Uzbrojeni w powyższe narzędzie jesteśmy gotowi do dowodu Stwierdzenia 4.

Dowód. Ustalmy $t > 0$. Określmy funkcję nową funkcję $g(x)$ następująco (zakładamy, że f jest dodatnia, w przeciwnym wypadku bierzemy moduł):

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & f(x) \geq t/2 \\ 0 & f(x) < t/2 \end{cases}.$$

Wtedy $f \leq g + t/2$ zatem $f^* \leq g^* + t/2$ oraz

$$\{x : f^*(x) > t\} \subset \{x : g^*(x) > t/2\}.$$

Stosując Stwierdzenie 3 do funkcji g uzyskujemy, że

$$\mu(\{x : f^*(x) > t\}) \leq 2Ct^{-1} \int g d\mu = 2Ct^{-1} \int_{f(x)\geq t/2} f d\mu.$$

Z Lematu 5

$$\int (f^*)^p = \int_0^\infty pt^{p-1}\mu(A_t)dt \leq 2Cp \int_0^\infty t^{p-2} \int_{x:f(x)\geq 1/2} f d\mu dt =$$

$$= 2Cp \int f(x) \int_0^{2f(x)} t^{p-2} dt d\mu = 2^p \frac{Cp}{p-1} \int f(x)^p \, d\mu.$$

□

Powyższy dowód zaczerpnąłem z książki Mattili. Można go znaleźć w bardzo wielu miejscach.

2. Funkcje wypukłe

Referencją do tego rozdziału jest książka Phelpsa (nie tego od rekordów świata w pływaniu) „Convex Functions, Monotone Operators and Differentiability” z serii LNiM 1364.

Definicja 6. *Niech $\Omega \subset V$ będzie podzbiorem wypukłym przestrzeni Banacha. Funkcję $f : \Omega \to \mathbb{R}$ nazwiemy* wypukłą *jeśli dla każdego $x, y \in \Omega$ oraz $t \in (0,1)$ zachodzi znana nierówność*

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y).$$

Warunek wypukłości Ω jest po to, aby nie kłopotać się o sensowność wyrażenia po lewej stronie.

Stwierdzenie 7. *Jeśli f i g wypukłe, to $f+g$ jest wypukła. Granica punktowa ciągu funkcji wypukłych jest wypukła. Złożenie funkcji wypukłej z funkcją wypukłą i monotoniczną jest wypukłe.*

Lemat 8. *Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie wypukła. Określamy $\Delta_x f(y) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$. Wtedy $\Delta_x f$ jest funkcją rosnącą parametru y.*

Dowód. Przyjmijmy bez zmniejszania ogólności, że $x = f(x) = 0$. Wtedy $\Delta_x f(y) = f(y)/y$. Niech $z > y > 0$. Wtedy

$$f(z)/z - f(y)/y = \frac{1}{y}\left(f(z)\frac{y}{z} + \frac{z-y}{z}f(0) - f(y)\right) \geq 0.$$

W dowodzie skorzystaliśmy z tego, że $f(0) = 0$. Dowód faktu dla $z > 0 > y$ pozostawiamy jako ćwiczenie. $\square$

Wniosek 9. *Dla funkcji wypukłej z $\mathbb{R}$ w $\mathbb{R}$ istnieją pochodne jednostronne w każdym punkcie.*

Dowód. Gdy $y \to 0^+$, funkcja $\Delta_x(y)$ jest monotonicznie malejąca oraz ograniczona przez $\Delta_x(-\varepsilon)$. Stąd ma granicę. $\square$

Wniosek 10. *Niech $f : V \to \mathbb{R}$ będzie wypukła. Wtedy, dla każdego $x_0 \in V$ istnieje pochodna prawostronna $df^+(v)$ w każdym kierunku v. Jest ona subaddytywna ze względu na v.*

Dowód. Istnienie pochodnej prawostronnej wynika z zastosowania Wniosku 9. Subaddytywność pokazujemy z wypukłości. Mianowicie

$$\frac{f(x+hv_1+hv_2) - f(x)}{h} \leq \frac{f(x+2hv_1) - f(x)}{2h} + \frac{f(x+2hv_2) - f(x)}{2h}.$$

Przy przejściu z h do zera otrzymujemy

$$df^+(v_1 + v_2) \leq df^+(v_1) + df^+(v_2). \tag{7}$$

$\square$

Stwierdzenie 11. *Niech f jak wyżej. Załóżmy, że istnieją pochodne kierunkowe we wszystkich kierunkach w x_0 (tzn. pochodna prawostrona jest równa lewostronnej). Wtedy różniczka $df = df^+$ jest liniowa. Czyli funkcja jest różniczkowalna w sensie Gâteaux w x_0.*

Dowód. Z założenia $df^+(-v) = -df^+(v)$. Stosujemy nierówność (7) dwukrotnie: raz dla v_1, v_2, raz dla $-v_1, -v_2$. Stąd uzyskujemy równość w (7). $\square$

Stwierdzenie 12. *Załóżmy, że f jest ciągła w pewnej kuli $B(x_0, 2\delta)$ (wystarczy lokalna ograniczoność). Wtedy f jest lokalnie lipschitzowska w $B(x_0, \delta)$.*

Dowód. Z założenia $|f(x)| \leq M_1$ gdy $x \in B(x_0, 2\delta)$. Niech $x, y \in B(x_0, \delta)$ oraz $\alpha = ||y - x||$. Określamy punkt

$$z = y + \frac{\delta}{\alpha}(y - x).$$

Zatem $z \in B(x_0, 2\delta)$ i $||z - y|| = \delta$. Wtedy

$$y = \frac{\alpha}{\alpha + \delta} z + \frac{\delta}{\alpha + \delta} x.$$

Zatem z wypukłości

$$f(y) \leq \frac{\alpha}{\alpha + \delta} f(z) + \frac{\delta}{\alpha + \delta} f(x).$$

Czyli

$$f(y) - f(x) \leq \frac{\alpha}{\alpha + \delta}(f(z) - f(x)) \leq \frac{\alpha}{\alpha + \delta} 2M_1 \leq \alpha \frac{2M_1}{\delta}.$$

Ale $\alpha = ||y - x||$. To kończy dowód. □

Wniosek 13. *Jeśli pochodne cząstkowe istnieją we wszystkich kierunkach oraz f jest ciągła w x_0, to pochodna df jest operatorem liniowym ciągłym.*

Dowód. Liniowość była pokazana w Stwierdzeniu 11. Wystarczy pokazać, że $df^+(v) \leq C||v||$. To jednak wynika ze Stwierdzenia 12. Istotnie, wiemy, że $|f(x_0 + hv) - f(x_0)| \leq L||x_0 + hv - x_0||$. Dla dostatecznie małych h. Stąd wystarczy wziąć $C = L$. □

Zupełnie inny charakter ma poniższy fakt, prawdziwy tylko w skończonej liczbie wymiarów.

Stwierdzenie 14. *Jeśli $f : V \to \mathbb{R}$ wypukła, V skończenie wymiarowa i f ma pochodne cząstkowe w x_0, to f ma pochodną Frécheta.*

Dowód. Niech $V = \mathbb{R}^{n-1}$. Niech $D_n : \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją określoną jako

$$D_n(v) = \frac{f(x_0 + \frac{1}{n}v)}{1/n}.$$

Wtedy D_n jest ciągiem funkcji ciągłych, zbieżnych monotonicznie do funkcji, która jest ciągła. Na mocy twierdzenia Diniego (wykorzystujemy zwartość $\mathbb{S}^{n-1}$!!!) zbieżność jest jednostajna. Co oznacza istnienie pochodnej w sensie Frécheta. □

Przykład 15. Założenia o skończonej wymiarowości nie da się pozbyć w ogólności. Weźmy sobie funkcję $|| \cdot ||$ na $C(X)$. Ma ona prawie wszędzie pochodną Gâteaux, jest wypukła, ale nie ma pochodnej Frécheta w żadnym punkcie.

Poniższy fakt jest równie prosty, jak poprzednie a ma poważne konsekwencje analityczne.

Lemat 16. *$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest wypukła, to df^+ jest rosnąca, czyli $df^+(x_1) \leq df^+(x_2)$, gdzie df^+ oznacza pochodną prawostronną.*

Dowód. Załóżmy, że $x_1 = f(x_1) = 0$. Wtedy

$$df^+(0) = \lim_{y \to 0^+} f(y)/y.$$

Wiemy z Lematu 8, żeta zbieżność jest monotoniczna, to znaczy, że $df^+(0) \leq f(y)/y$. Z drugiej strony $df^+(x_2) = \lim_{t\to 0^+}(f(x_2+t) - f(x_2))/t$. Wystarczy więc pokazać, że dla dowolnego $t > 0$ mamy

$$\frac{f(x_2)}{x_2} \leq \frac{f(x_2+t) - f(x_2)}{t}. \tag{8}$$

Połóżmy $\lambda = \frac{x_2}{x_2+t}$. Wtedy $x_2 = \lambda(x_2+t) + (1-\lambda)\cdot 0$. Z wypukłości uzyskujemy $f(x_2) \leq \lambda f(x_2+t)$, co przekłada się na (8). □

Wniosek 17. *Funkcja wypukła na $\mathbb{R}$ ma co najwyżej skończenie wiele punktów, w których jest nieróżniczkowalna.*

Dowód. df^+ jako monotoniczna ma co najwyżej przeliczalnie wiele punktów nieciągłości. Wykażemy, że każdy punkt nieróżniczkowalności df^+ jest punktem nieciągłości f. Jest to niemal oczywiste. Załóżmy, że istnieje takie $\varepsilon > 0$, że dla każdego $x > 0 > y$

$$f(x)/x - f(y)/y > \varepsilon.$$

Wiemy, że $df^+(y) \leq \frac{f(z)-f(y)}{z-y}$ dla wszystkich $z > y$. A zatem $df^+(y) \leq f(y)/y$. To oznacza, że $f(x)/x - df^+(y) > \varepsilon$. Schodząc z x do zera mamy $df^+(0) - df^+(y) > \varepsilon$. Wobec dowolności y mamy skok w prawostronnej pochodnej. □

Stwierdzenie 18. *Niech $V = \mathbb{R}^n$. Niech $F_1, \ldots, F_n$ będą podzbiorami $\mathbb{R}^n$ o tej własności, że $x \in F_k$ wtedy i tylko wtedy, gdy f nie ma pochodnej w kierunku $\frac{\partial}{\partial x_k}$. Wtedy każdy ze zbiorów F_k jest miary zero. Inaczej mówiąc, funkcja wypukła w $\mathbb{R}^n$ jest różniczkowalna prawie wszędzie.*

Dowód. Przecinając V i F_i ze coraz większymi prostopadłościanami możemy założyć, że F_i są ograniczone. F_i są ponadto mierzalne. Niech χ będzie funkcją charakterystyczną zbioru F_1. Mamy

$$\mu(F_1) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} dx_2 \ldots dx_n \left(\int_{\mathbb{R}} \chi(x_1, x_2, \ldots, x_n) \right) dx_1.$$

Ale gdy trzymamy $x_2, \ldots, x_n$, $\chi(x_1)$ jest funkcją charakterystyczną zbioru, w którym funkcja $x_1 \to f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ nie ma pochodnej, a więc zbioru przeliczalnego. Czyli całka jest zerowa. □

Twierdzenie 19 (Mazura)**.** *Niech V ośrodkowa przestrzeń Banacha. Wtedy zbiór punktów, w których funkcja ciągła i wypukła f nie ma pochodnej Gâteaux jest gęsty G_δ.*

Dowód twierdzenia Mazura. Rozpatrzmy sferę jednostkową w E. Jest to przestrzeń ośrodkowa. Niech x_n będzie gęstym zbiorem przeliczalnym ze sfery. Dla $n, m > 1$ rozpatrzmy zbiór tych x takich, że $\forall t \in (0,1)$ mamy

$$\frac{f(x+tx_n)-f(x)}{t}+\frac{f(x-tx_n)-f(x)}{t} > \frac{1}{m}.$$

Zbiór punktów, dla których nie istnieje pochodna, jest sumą zbiorów $A_{n,m}$. Istotnie, jeśli $x \in A_{n,m}$ to prawostronna pochodna kierunkowa w kierunku x_n jest o co najmniej $1/m$ większa, niż lewostronna.

W drugą stronę: jeśli f jest nieróżniczkowalna w x_0, to istnieje taki wektor v, długości 1 i takie $m > 0$, że

$$\frac{f(x_0+tv)-f(x_0)}{t}+\frac{f(x_0-tv)-f(x_0)}{t} > \frac{2}{m}$$

dla wszystkich $t > 0$. Niech L będzie stałą Lipschitza dla f w otoczeniu x_0. Wybierzmy takie n, że $||v-x_n|| < 1/2mL$. Wtedy $|f(x_0+tv)-f(x_0+tx_n)| < Lt/2mL = t/2m$ oraz $|f(x_0-tv)-f(x_0-tx_n)| < Lt/2mL = t/2m$. Z nierówności trójkąta mamy

$$\frac{f(x_0+tx_n)-f(x_0)}{t}+\frac{f(x_0-tx_n)-f(x_0)}{t} > \frac{2}{m}-2\frac{1}{2m}=\frac{1}{m}.$$

Inaczej mówiąc, *funkcja nieróżniczkowalna w kierunku v jest również nieróżniczkowalna w kierunkach dostatecznie bliskich v.*

Na mocy twierdzenia Baire'a wystarczy pokazać, że każdy pojedynczy zbiór $A_{n,m}$ jest domknięty, a jego dopełnienie gęste.

Domkniętość. Załóżmy, że mamy ciąg $z_k \to z$ oraz $z_k \in A_{n,m}$. Ustalmy $t_0 > 0$ oraz $\varepsilon > 0$. Niech M będzie lokalną stałą Lipschitza dla f w otoczeniu z. Na mocy zbieżności z_k, istnieje takie $K > 0$, że dla $k > K$ mamy $||z_k - z|| < \frac{t_0\varepsilon}{4M}$. Wtedy, z Lipschitzowskości, $|f(z_k+tx_n)-f(z+tx_n)| < t_0\varepsilon/4$. To oznacza, że dla $t \geq t_0$ zachodzi

$$\frac{f(z+tx_n)+f(z-tx_n)-2f(z)}{t} \geq \frac{1}{m}-\varepsilon.$$

Ale ε było dowolne. Ponadto t_0 też było dowolne. Więc $z \in A_{n,m}$.

Gęstość dopełnienia. Niech $z_0 \in A_{n,m}$. Rozpatrzmy $f_1(r) = f(z_0 + rx_n)$. Jest to funkcja wypukła jednej zmiennej. Zbiór jej nieróżniczkowalności jest przeliczalny, więc jego dopełnienie jest gęste. Istnieje więc dowolnie małe r_0 takie, że f_1 jest różniczkowalne w $z_1 = z_0 + r_0 x_n$. To oznacza, że $z_1 \notin A_{n,m}$. □

Przykład 20. *Rozpatrzmy przestrzeń l^∞ (zbiór $x = (x_1, \dots, x_n, \dots)$ z normą $||x|| = \sup|x_i|$. Określamy przekształcenie*

$$p(x) = \limsup |x_n|.$$

Wtedy $p(x)$ jest wypukłe i ciągłe, ale nie ma pochodnej Gâteaux w żadnym punkcie.

Dowód. Wypukłość jest oczywista. Ciągłość też, gdyż $p(x) \leq ||x||_\infty$. Załóżmy, że $p(x) = 0$. Czyli $x_n \to 0$. Niech $y = (1, 1, \dots)$. Wtedy

$$\frac{1}{t}(p(x + ty) - p(x)) = \frac{|t|}{t}.$$

W tych punktach zatem pochodna nie istnieje. Przyjmijmy zatem, że $p(x) > 0$. Normując możemy założyć, że $p(x) = 1$. Istnieje więc podciąg $\{x_{n_i}\}$ taki, że $|x_{n_i}| \to 1$ oraz wszystkie x_{n_i} są tego samego znaku, mnożąc przez -1 możemy nawet przyjąć, że $x_{n_i} \to 1$. Przyjmijmy

$$y_n = \begin{cases} 0 & n \neq n_i \\ 0 & n = n_i, i \text{ nieparzyste} \\ 1 & n = n_i, i \text{ parzyste} \end{cases}.$$

Wtedy $p(x + ty) = 1 + t$, gdy $t > 0$ oraz 1, gdy $-1 < t < 0$. To oznacza, że $dp^+(y) = 1$, $dp^-(y) = 0$. □