Zadania z wiązek wektorowych.

wersja 1.1 z 21 marca 2007

Maciej Borodzik

Tych zadań będzie z czasem więcej...

Definicja 1. Niech B będzie przestrzenią topologiczną. Trójkę $E \xrightarrow{\pi} B$ nazwiemy *wiązką wektorową rangi* r nad ciałem K, jeśli

włókna liniowe: π jest na, oraz $\forall b \in B\ \pi^{-1}(b) \simeq K^r$.

lokalna trywialność: Istnieje pokrycie U_i przestrzeni V oraz homeomorfizmy $\phi_i : \pi^{-1}(U_i) \to U_i \times K^r$, które jest liniowe po obcięciu do dowolnego zbioru $\pi^{-1}(b)$. Ponadto ϕ_i jest identycznością na U_i.

E nazywa się *przestrzenią totalną* wiązki, B *bazą*. Dla $b \in B$ zbiór $\pi^{-1}(b)$ nazywamy *włóknem*. Pokrycie U_i nazywamy *pokryciem trywializującym*, ϕ_i — *trywializacją*.

Zadanie 1. Wstęga Möbiusa ma strukturę wiązki rzeczywistej rangi 1 nad S^1.

Zadanie 2. Dla dowolnej przestrzeni B zbiór $B \times K^r$ jest wiązką. Nazywamy ją *trywialną*.

Definicja 2. Niech E_1, π_1 i E_2, π_2 będą wiązkami nad B. Odwzorowanie $\xi : E_1 \to E_2$ nazwiemy morfizmem wiązek, jeśli, mówiąc nieściśle, jest liniowe na włóknach i włókno nad b przechodzi na włókno nad b. Mówiąc precyzyjnie, następujący diagram jest przemienny.

$$\begin{tikzcd} E_1 \arrow[rr, "\xi"] \arrow[dr, "\pi_1"] & & E_2 \arrow[dl, "\pi_2"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

Zadanie 3. Wstęga Möbiusa nie jest homeomorficzna z wiązką $S^1 \times \mathbb{R}$, inaczej mówiąc, nie jest trywialna.

Zadanie 4. Jeśli B jest rozmaitością, to E też jest rozmaitością.

Zadanie 5. Załóżmy, że mamy dwa zbiory U_1 i U_2 z pokrycia trywializującego. Morfizm $\phi_1^{-1} : U_1 \times K^r \to \pi^{-1}(U_1)$ oraz $\phi_2 : \pi^{-1}(U_2) \to U_2 \times K^r$ po obcięciu do zbioru $U_1 \cap U_2$ zadaje pewne przekształcenie $g_{12} : (U_1 \cap U_2) \times K^r \to (U_1 \cap U_2) \times K^r$. Wykaż, że g_{12} jest liniowe na drugiej współrzędnej. Takie g_{12} nazywamy *odwzorowaniem sklejającym*.

Zadanie 6. A teraz weźmy sobie trzy zbiory, U_1, U_2 i U_3 o niepustej części wspólnej. Wykaż, że $g_{12}g_{23}g_{31}$ jest identycznością. Nazywamy to *warunkiem kocyklu*.

Zadanie* 7. Wykaż, że wiązka $E \to B$ jest trywialna (tzn. homeomorficzna z $B \times K^r$), wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego U_j ze zbioru pokrycia trywializującego istnieje taka funkcja $h_i : U_i \to GL(K, r)$, że $g_{ij} = h_i h_j^{-1}$.

Zadanie 8. Niech U_i będzie dowolnym pokryciem B. Załóżmy, że dla każdego przecięcia $U_i \cap U_j$ mamy zadaną funkcję $g_{ij} : U_i \cap U_j \to GL(K, r)$, oraz g_{ij} spełniają warunek kocyklu. Rozpatrzmy zbiór

$$\tilde{E} = \coprod_{i \in I} U_i \times K^r$$

oraz relację równoważności: jeśli $u \in U_i \cap U_j$, to $(u, v) \in U_i \times K^r$ utożsamiamy z $(u, g_{ij}(v)) \in U_j \times K^r$. Wykaż, że $E/\sim$ ma strukturę wiązki rangi r nad B z funkcjami przejścia g_{ij}.

Zadanie 9. Wykaż, że B jest mocnym retraktem otoczeniowym E.

Zadanie 10. Niech E_1 i E_2 będą dwoma wiązkami nad B rangi r_1 i r_2. Określ wiązkę $E_1 \oplus E_2$ nad B rangi $r_1 + r_2$. Można to zrobić na przykład przez zadanie odpowiednich funkcji przejścia.

Zadanie 11. Niech $B = \mathbb{C}P^n$ będzie przestrzenią rzutową. Każdemu punktowi $x \in \mathbb{C}P^n$, któremu odpowiada prosta y w $\mathbb{C}^{n+1}$ przyporządkowujemy tą prostą. Wykaż, że te proste sklejają się do wiązki liniowej H (tj. rangi 1) nad $\mathbb{C}P^n$. Czy H jest trywialna? Wiązkę H nazwiemy *wiązką uniwersalną*.

Zadanie 12. Jeśli E jest wiązką nad B, to możemy określić wiązkę E^* nad B tej samej rangi. Wykaż, że funkcje przejścia są odwrotnościami funkcji przejścia dla E.

Zadanie 13. Niech $B = G(k, n)$ będzie grassmanianem płaszczyzn k–wymiarowych w przestrzeni n–wymiarowej. Punktowi x reprezentującemu płaszczyznę L przypisujemy płaszczyznę L. Wykaż, że to przyporządkowanie skleja się do wiązki.

Zadanie 14. Niech $f : B_1 \to B_2$. Załóżmy, że dana jest wiązka E nad B_2. Skonstruuj wiązkę nad B_1, której włóknem nad b_1 jest włókno nad $f(b_1)$. Nazywamy to przeciągnięciem (pull-backiem) wiązki E i oznaczamy przez f^*E.

Zadanie 15. Wykaż, że jeśli M jest rozmaitością, to istnieje na niej wiązka styczna, której włóknem nad x jest T_xM.

Zadanie* 16. Opisz wiązkę styczną do $\mathbb{C}P^n$ w terminach wiązki tautologicznej H.

Zadanie* 17. Niech U będzie zbiorem macierzy $n \times n$ o współczynnikach z $\mathbb{C}$ o *różnych* wartościach własnych. Rozpatrzmy przyporządkowanie macierzy $M \subset U$ nieuporządkowanego zbioru wartości własnych $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}^n \subset L$. ($L$ jest podzbiorem otwartym $\mathbb{C}^n/n!$). Wykaż, że zadaje to wiązkę wektorową nad L. Czy jest ona trywialna?

Zadanie* 18. Macierze odwracalne rozwłókniają się nad macierzami ortogonalnymi (to znaczy wykaż, że istnieje wiązka wektorowa, której przestrzeń totalną stanowią macierze odwracalne, a bazę macierze ortogonalne).

Zadanie 19. Jeśli G jest grupą i jednocześnie rozmaitością, to wiązka styczna TG jest trywialna.

Zadanie 20. Wiązka styczna do S^2 nie jest trywialna.