Zadania z pól wektorowych.

wersja 1.0 z 21 marca 2007

Maciej Borodzik

Te zadania będziemy robić na ćwiczeniach. A przynajmniej część z nich...

Zadanie 1. Niech v będzie pewnym polem wektorowym na $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Niech $0 \in \Omega$. Rozważmy malutki prostopadłościan $V_\varepsilon \in \Omega$, o bokach $\varepsilon(1,0,\dots,0),\dots,\varepsilon(0,\dots,0,1)$ i o jednym z wierzchołków w 0. Niech V_t będzie przybliżonym prostopadłościanem, który jest obrazem potoku zadanego przez v po czasie $t \ll 1$. Wykaż, że

$$\frac{d}{dt}\operatorname{vol} V_t|_{t=0} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial v_i}{\partial x_i}.$$

Zadanie 2. Udowodnij, że potok pola v zachowuje objętość wtedy i tylko wtedy, gdy $\operatorname{div} v \equiv 0$.

Zadanie 3. W przestrzeni $\mathbb{R}^n$ o współrzędnych $x_1,\dots,x_n$ określamy operator gwiazdkowy Hodge'a wzorem

$$* dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} = (-1)^a dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_{n-k}},$$

gdzie a jest wyznaczone przez warunek $\omega \wedge *\omega = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ dla form postaci $dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$. Wykaż, że $*(*\omega) = (-1)^{k(n-k)}$ dla wszystkich form ω.

Zadanie 4. Dla $n = 4$ i $k = 2$ gwiazdka przeprowadza 2–formy na 2–formy. Znajdź jej wektory własne i wartości własne.

Zadanie 5. Załóżmy, że mamy w przestrzeni $\mathbb{R}^n$ zadany iloczyn skalarny przez macierz g_{ij} w bazie x_i. Skonstruuj iloczyn skalarny w przestrzeni $\Lambda^k\mathbb{R}^n$.

Uwaga 1. Wzór jest dość nieprzyjemny, żeby nie powiedzieć paskudny.

Zadanie 6. Niech g_{ij} będzie jak wyżej. Wtedy mamy naturalne utożsamienie przestrzeni $\Lambda^n\mathbb{R}^n$ wzorem $x_1 \wedge \dots \wedge x_n \to \sqrt{\det g}$. Wykaż, że przy zamianie współrzędnych wzór się zachowuje.

Zadanie 7. Niech ω będzie formą $k-$liniową antysymetryczną w $\mathbb{R}^n$. Odwzorowanie $R_\omega : \Lambda^{n-k}\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ jest zadane przez mnożenie z prawej strony przez ω a potem przez utożsamienie w zadaniu 6. A zatem R_ω jest iloczynem skalarnym (w sensie zadania 5) z pewną formą z $\eta \in \Lambda^{n-k}$. Wykaż, że jeśli g_{ij} jest macierzą identycznościową, to $\eta = *\omega$ (ew. z dokładnością do znaku). W szczególności gwiazdka Hodge'a nie zależy od metryki.

Zadanie 8. Niech $y_1,\dots,y_n$ będą innymi współrzędnymi w $\mathbb{R}^n$ a macierz A zamianą tych współrzędnych, czyli $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$. Opisz działanie gwiazdki w nowych współrzędnych. W szczególności wykaż, że jeśli A jest ortogonalna, to gwiazdka ma tę samą postać.

Odpowiedź 1. Dla formy $* dy_{i_1} \wedge \dots dy_{i_k}$ mamy

$$*\omega = \frac{1}{(n-k)!}(-1)^a\sqrt{|\det g|}\sum_{j_s,k_s} g^{j_sk_s} dy_{k_1} \wedge \dots dy_{k_s},$$

gdzie $g = g_{ij}$ jest macierzą Gramma układu $y_1,\dots,y_n$ (czyli $g = A^TA$), g^{ij} jest macierzą odwrotną a a jest znakiem permutacji $\{i_1,\dots,i_k,j_1,\dots,j_{n-k}\}$ zbioru $\{1,\dots,n\}$. Sumujemy k_s po wszystkich permutacjach, a j_s po wszystkich n.

Zadanie 9. Niech $\omega = dy_{i_1} \wedge \dots \wedge dy_{i_n}$. Udowodnij, że $*(*\omega) = (-1)^{k(n-k)}\operatorname{sgn}(\det(g))\omega$.

Zadanie 10. Opisz (wzór jest prosty) operator $*$ na 1–formach i 0–formach w dowolnej metryce.

Zadanie 11. Rozpatrzmy odwzorowanie I, które z pola wektorowego $v = \sum v_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ robi 1–formę $\omega = \sum v_i dx_i$. Wykaż, że dla dowolnej $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\operatorname{grad} f = I^{-1} df$.

Zadanie 12. Niech X i Y będą zbiorami otwartymi odpowiednio w $\mathbb{R}^n$ i w $\mathbb{R}^k$, współrzędne w tych zbiorach będą oznaczane odpowiednio przez x i y. Niech $F : X \to Y$. Dla dowolnej funkcji $f : Y \to \mathbb{R}$ określamy $g : X \to \mathbb{R}$ jako złożenie $g(x) = f(F(x))$. Załóżmy, że dla każdych takich f i g zachodzi

$$DF(\operatorname{grad} g(x)) = \operatorname{grad} f,$$

który to wzór należy czytać tak, że DF jest pochodną i przeprowadza ona wektor z X na wektor z Y. $\operatorname{grad} f$ bierzemy oczywiście w punkcie $F(x)$. Wykaż, że w takim wypadku F jest lokalną izometrią na swój obraz, to znaczy $\forall x \in X$ macierz $DF(x)$ ma kolumny prostopadłe i o długości 1. Jeśli $k = n$ jest to to samo, co powiedzieć, że DF jest ortogonalna.

Zadanie 13. A teraz, niech X, Y i F będą jak wyżej. Niech $\omega = \sum \omega_i dy_i$ będzie 1–formą na Y. Dla dowolnego wektora $v \in T_{x_0}X$ możemy wziąć $DF(v)$ i zaaplikować do niego ω, czyli $\omega(DF(v))$ jest liczbą. A więc mamy określoną 1–formę na X, niech to będzie ω'. Zapisz ω' w lokalnym układzie współrzędnych.

Zadanie 14. W $\mathbb{R}^3$ opisz następujące operacje za pomocą I, d i gwiazdki Hodge'a.

(a) $v \to \operatorname{rot} v$.
(b) $v \to \operatorname{div} v$.
(c) $f \to \Delta f$.

W punkcie (b) i (c) zrób to samo w $\mathbb{R}^n$.

Zadanie 15. Niech $x_1, \ldots, x_n$ będą lokalnym układem współrzędnych a $g_{ij}(x)$ iloczynem skalarnym wektorów $(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j})$ (macierz Gramma). Zapisz operator Laplace'a w podanych współrzędnych.

Zadanie 16. Zapisz operator Laplace'a we współrzędnych biegunowych na $\mathbb{R}^3$.

Zadanie 17. Niech $g = \sum g_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$ i $h = \sum h_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j}$ będą dwoma polami wektorowymi. Weźmy $x_0 = 0$ i niech $\gamma_0(t)$ spełnia $\dot\gamma_0(t) = g(\gamma_0(t))$, $\gamma_0(0) = x_0$. Niech $x_1 = \gamma_0(\varepsilon)$. Niech teraz $\dot\gamma_1(t) = h(\gamma_1(t))$, $\gamma_1(0) = x_1$ będzie krzywą całkową pola h. Niech $x_2 = \gamma_1(\varepsilon)$. Weźmy teraz krzywą całkową $\dot\gamma_2(t) = g(\gamma_2(t))$, $\gamma_2(0) = x_2$ i połóżmy $x_3 = \gamma_2(-\varepsilon)$. W końcu, niech γ_3 będzie krzywą całkową $\dot\gamma_3(t) = h(\gamma_3(t))$, $\gamma_3(0) = x_3$ i $x_4 = \gamma_3(-\varepsilon)$. Wtedy $x_4 = x_0 + k\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3)$. Wykaż, że

$$k = \sum_{i,k=1}^{n} \left(g_i \frac{\partial h_i}{\partial x_k} - h_i \frac{\partial x_i}{\partial x_k} \right) \frac{\partial}{\partial x_k}. \tag{1}$$

Wtedy k oznaczamy przez $[g, h]$ i nazywamy *komutatorem* lub *nawiasem Liego* pól wektorowych. Biorąc różne x_0 dostajemy oczywiście k jako nowe pole wektorowe.

Powyższe zadanie można przeformułować w sposób następujący (i zdecydowanie uprościć, zobacz Arnold, Mechanika…, rozdział 39). Niech v będzie polem wektorowym. Określmy przez $A_v(t)$ jednoparametrową grupę dyfeomorfizmów związaną z v, czyli $\frac{dA_v(t)(x)}{dt}|_{t=0} = v(x)$. Wtedy dla dowolnej funkcji $f(x)$ możemy określić $vf(x)$, czy też $\partial_v f(x)$ (zależnie od konwencji) jako $\frac{d}{dt} f(A_v(t)x)|_{t=0}$. Zapis w lokalnych współrzędnych pozwala przekonać się, że w punkcie x ∂_v jest po prostu pochodną kierunkową w kierunku $v(x)$.

Weźmy sobie teraz drugie pole wektorowe w. Określmy potok tego pola (dla niewtajemniczonych: to jest to samo, co jednoparametrowa grupa dyfeomorfizmów), A_w^s (nazwa bez skojarzeń politycznych). Pytamy się, kiedy $A_w^s A_v^t = A_v^t A_w^s$, czyli, czy te potoki są przemienne.

Niech f będzie dowolną funkcją gładką. Popatrzmy sobie na różnicę $\phi(A_w^s A_v^t(x)) - \phi(A_v^t A_w^s(x))$. Jest to pewna funkcja. Dla $s = 0$ i dla $t = 0$ jest ona zerowa. Pierwszy jej nieznikający wyraz w rozwinięciu Taylora w $t = 0$, $s = 0$ oznaczamy przez ψ.

Zadanie 18. Wykaż, że $\psi(x) = \partial_k \phi(x)$, gdzie k jest określone wzorem (1) z $g = v$ i $h = w$. Ponadto, jeśli $k = 0$, to elementy A_w^s i A_v^t komutują dla dowolnych s i t jako dyfeomorfizmy.

Uwaga 2. Struktura grupy dyfeomorfizmów zwartej rozmaitości M (oczywiście dyfeomorfizmy tworzą grupę, zazwyczaj nieskończenie wymiarową), jest przedmiotem intensywnych badań naukowych.

Zadanie 19. Udowodnij, że jeśli $[g, h] = 0$, to $x_4 = x_0$ niezależnie od ε. Oznacza to, że potoki pól wektorowych *komutują*.

Zadanie 20. Niech ω będzie 1–formą a g, h dwoma polami wektorowymi. Wykaż, że

$$d\omega(g, h) = g\omega(h) - h\omega(g) - \omega([g, h]).$$

Wzór ten nazywa się *wzorem Cartana.*

Zadanie 21. Niech teraz $g_1, \ldots, g_{n+1}$ będą polami wektorowymi a ω n–formą. Udowodnij wzór

$$(n+1)d\omega(g_1, \ldots, g_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} g_i \omega(g_1, \ldots, \hat{g}_i, \ldots, g_{i+1}) + \\ + \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \omega([g_i, g_j], g_1, \ldots, \hat{g}_i, \ldots, \hat{g}_j, \ldots, g_{n+1}),$$

gdzie $\hat{g}_i$ oznacza, że ten wyraz jest opuszczony.

Zadanie 22. Udowodnij, że jeśli g, h i k są polami wektorowymi, to $[[g, h], k] + [[h, k], g] + [[k, g], h] \equiv 0$.

Zadanie 23. Niech G będzie grupą macierzy ortogonalnych czyli $g^T g = Id$. Niech $\mathfrak{g}$ będzie przestrzenią liniową macierzy a takich, że $a^T + a = 0$. Wykaż, że $\mathfrak{g}$ jest przestrzenią styczną do G w punkcie $g_0 = Id$.

Zadanie 24. Niech $a \in \mathfrak{g}$. Niech $g \in G$. Określamy przekształcenie $L_g : G \to G$ wzorem $L_g(h) = g \cdot h$ (mnożenie z lewej strony przez g. Wtedy $DL_g(0)$ jest przekształceniem liniowym między $T_{Id}G$ a $T_g G$. Określmy $a(g)$ jako $DL_g(0)(a)$. Wykaż, że $a(g)$ jest polem wektorowym na G, oraz $DL_g(a) = a$, to znaczy, że a jest niezmiennicze względem mnożenia przez G z lewej strony (w skrócie *lewoniezmiennicze*).

Zadanie 25. Załóżmy, że v jest nieznikającym lewoniezmienniczym polem wektorowym na G. Udowodnij, że v jest postaci $a(g)$ tak jak w poprzednim zadaniu.

Zadanie 26. Niech v_1 i v_2 będą dwoma lewoniezmienniczymi polami na G pochodzącymi od elementów $a, b \in \mathfrak{g}$. Wykaż, że nawias Liego $w = [v_1, v_2]$ też jest lewoniezmienniczy. Ponadto w pochodzi od elementu $[a, b] \in \mathfrak{g}$, gdzie $[a, b] = ab - ba$.

Zadanie 27. Niech E_i, H_i $i = 1, 2, 3$ będą funkcjami (składowymi dwóch pól wektorowych w $\mathbb{R}^3$). Określamy na $\mathbb{R}^4 \ni (x_0, x_1, x_2, x_3)$ formę

$$F = \sum_{\alpha=1}^{3} E_\alpha dx_0 \wedge dx_\alpha + H_1 dx_2 \wedge dx_3 + H_2 dx_3 \wedge dx_1 + H_3 dx_1 \wedge dx_2.$$

Wykaż, że równanie

$$dF = 0$$

równoważne jest układowi

$$\operatorname{rot} E = -\frac{\partial H}{\partial x_0}, \qquad \operatorname{div} H = 0.$$

Zadanie 28. Niech w $\mathbb{R}^4$ zadana będzie metryka $g_{ii} = 1$ dla $i = 1, 2, 3$, $g_{00} = -1$, $g_{ij} = 0$ dla $i \neq j$. Niech $j_{(4)} = (\rho, j_1, j_2, j_3)$ będzie polem wektorowym w $\mathbb{R}^4$, a $\mathbf{j} = (j_1, j_2, j_3)$ polem w $\mathbb{R}^3$. Wykaż, że układ

$$\delta F \stackrel{df}{=} * d * F = 4\pi j.$$

Równoważny jest systemowi

$$\operatorname{div} E = 4\pi\rho, \qquad \operatorname{rot} H + \frac{\partial E}{\partial x_0} = 4\pi\mathbf{j}.$$

Powyższe dwa zadania dotyczą elektrodynamiki. E jest polem elektrycznym, H — magnetycznym. ρ jest gęstością ładunku elektrycznego, zaś (j_1, j_2, j_3) jest prędkością ładunków w $\mathbb{R}^3$. Równania $\delta F = 4\pi j$ i $dF = 0$ są tzw. *równaniami Maxwella*. Można je uzyskać (co zrobimy w przyszłości, miejmy nadzieję) z równań Eulera–Lagrange'a dla pewnego lagranżjanu (związanego z elektrodynamiką). Jeśli $dF = 0$, to F możemy, przynajmniej lokalnie, zapisać jako dA dla pewnej 1–formy A, którą nazywamy potencjałem elektromagnetycznym. A nie jest wyznaczone jednoznacznie, bo możemy dodać do A różniczkę dowolnej funkcji df. Wybór A nazywa się w fizyce wyborem *cechowania*. Z punktu widzenia matematycznego, elektrodynamika jest teorią, która dzieje się na zespolonej wiązce liniowej. Mianowicie A jest formą koneksji takiej wiązki, zaś F ma interpretację krzywizny. Równanie $dF = 0$ dostajemy w takim przypadku zupełnie za darmo.