1. Całkowanie przez części. Teoria

1.1. **Podstawowe wzory.** W przypadku jednowymiarowym podstawowy wzór to

$$\int_a^b f'(x)\ dx = f(b) - f(a),$$

z którego wynika bezpośrednio wzór na całkowanie przez części

$$\int_a^b f'g + \int_a^b fg' = f(b)g(b) - f(a)g(a).$$

Mówimy, intuicyjnie, że całka z pełnej pochodnej jest równa przyrostowi funkcji.

W przypadku wielowymiarowym wzory na całkowanie uogólniają się. Należy uogólnić zarówno pojęcie przyrostu funkcji, jak i pojęcie pełnej pochodnej.

Najpierw potrzebujemy pojęcia dywergencji. Jeśli $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, zaś $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ jest funkcją różniczkowalną (interpretowaną jako pole wektorowe $F = (F_1, \ldots, F_n)$, gdzie $F_k \colon \Omega \to \mathbb{R}$ jest $k-$tą współrzędną), określamy

$$\operatorname{div} F = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F_k}{\partial x_k}.$$

Powyższą funkcję skalarną nazywamy *dywergencją* pola wektorowego F. Dywergencja mówi o tym, czy potok pola wektorowego rozszerza (zwiększa objętość), czy też ściešnia (zmniejsza objętość), wynika to z wzoru $L_F dvol = \div F \cdot dvol$, gdzie L_F jest pochodną Liego zaś $dvol$ formą objętości.

Przypuśćmy teraz, że Ω jest obszarem ograniczonym w $\mathbb{R}^n$ o brzegu klasy C^1. W punkcie $x \in \partial\Omega$ określamy n_x jako wektor normalny do $\partial\Omega$ o długości 1 skierowany na zewnątrz Ω. Jeśli $\Omega = \{x \colon g(x) > 0\}$ i ∇g nie znika na $\partial\Omega$, to $n_x = -\frac{1}{||\nabla g(x)||}\nabla g(x)$.

Twierdzenie 1 (wzór Greena)**.** Dla funkcji F klasy C^1 zachodzi wzór

$$\int_\Omega \operatorname{div} F = \int_{\partial\Omega} F \cdot n\, dvol(\partial\Omega),$$

gdzie całka po prawej stronie jest całką powierzchniową.

Uwaga 1. Całka $\int_S F \cdot n\, dvol(S)$ interpretuje się jako *strumień pola wektorowego* przechodzącego przez powierzchnię S.

1.2. **Całki powierzchniowe.** Warto przypomnieć pokrótce (zob [Birkholc, Rozdział 5]), jak obliczać całki powierzchniowe (ogólnie, całki po podrozmaitościach w $\mathbb{R}^n$). Wystarczy się ograniczyć do podrozmaitości sparametryzowanych. Niech więc $M \subset \mathbb{R}^n$ będzie podrozmaitością $k-$wymiarową, $U \subset \mathbb{R}^k$ podzbiorem otwartym, zaś $F\colon U \to M$ parametryzacją (gładka bijekcja, której różniczka ma w każdym punkcie rząd k). Niech $g : M \to \mathbb{R}$ będzie funkcją całkowalną. Wtedy określamy

$$\int_M g\, dvol(M) = \int_U g(F(x))\sqrt{\det DF(x)^T \cdot DF(x)}\, dx, \tag{1}$$

gdzie DF jest pochodną, $DF^T \cdot DF$ jest macierzą Gramma macierzy DF.

W szczególności, jeśli $k = n - 1$, zaś M jest wykresem funkcji, czyli $M = \{x_1, \dots, x_{n-1}, f(x_1, \dots, x_{n-1})\colon (x_1, \dots, x_{n-1}) \in U\}$, to

$$\int_M g\, dvol(M) = \int_U g(x_1, \dots, x_{n-1}, f(x_1, \dots, x_{n-1}))\cdot \\ \cdot \sqrt{1 + {f'_1}^2 + \dots + {f'_{n-1}}^2}\, dx_1 \dots dx_n,$$

gdzie f'_k oznacza $\frac{\partial f}{\partial x_k}$.

Z drugiej strony, jeśli $k = 1$, zaś $M = \{(x_1(t), \dots, x_n(t)) \in \mathbb{R}^n \colon t \in (a, b)\}$, mamy

$$\int_M g\, dvol(M) = \int_a^b g(x_1(t), \dots, x_n(t))\sqrt{\dot{x}_1^2 + \dots + \dot{x}_n^2}\, dt. \tag{2}$$

Tutaj $\dot{x}_k$ oznacza pochodną $\frac{dx_k}{dt}$.

Uwaga 2. W literaturze spotyka się oznaczenia $dvol(M)$, dM dS (jeśli M jest powierzchnią), $dl_k(M)$. My preferujemy tutaj oznaczenie[1] $dvol(M)$, które podkreśla, iż całkujemy względem miary objętościowej na rozmaitości M. Jeśli rozmaitość M jest jasna z kontekstu, będziemy pisali po prostu $dvol$. Czasami, jeśli będziemy chcieli podkreślić, że całkujemy względem konkretnej zmiennej, będziemy pisali $dvol(y)$.[2]

1.3. **Formy różniczkowe.** Przedstawimy pokrótce metodę całkowania, która używa form różniczkowych. O ile ścisłą definicję formy, można znaleźć w innych źródłach (najlepiej [Arnold, Część 7] lub [Schwartz, Rozdział 6]), tu podajemy najważniejsze wyniki i definicje.

[1][MB]: Można je oczywiście zmienić

[2][MB] Jest to potrzebne we wzorze (7). Nie upieram się przy tym oznaczeniu, sam uważam, że jest dość drętwe.

$k-$formą różniczkową na rozmaitości M nazwiemy obiekt, który w lokalnych współrzędnych $x_1, \dots, x_n$ zapisuje się jako

$$\omega = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_k \le n} f_{i_1 i_2 \dots i_k}(x) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k},$$

gdzie $f_{i_1 \dots i_k}$ są funkcjami gładkimi. Oznaczenie "$\wedge$" oznacza mnożenie antysymetryczne wyrażeń, tzn. $dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$ oraz $dx_i \wedge dx_i = 0$

$k-$formy można dodawać, mnożyć przez funkcje gładkie. Na formach można wykonywać również następujące operacje:

1. Mnożenie $k-$formy przez $l-$formę. Jeśli $\omega = dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$ jest $k-$formą, zaś $\eta = dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_l}$ jest $l-$formą, określamy

$$\omega \wedge \eta = dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_1} \wedge dx_{j_l}.$$

Przy czym to ostatnie wyrażenie jest równe zero, jeśli chociażby dwie z liczb $i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_l$ powtarzają się. Mnożenie kombinacji liniowych form (o współczynnikach zależnych od punktu x) traktujemy jak zwykłe mnożenie (rozdzielnie względem dodawania)

2. Przeciągnięcie formy przez odwzorowanie. Jeśli $F\colon M \to N$ jest odwzorowaniem klasy C^1, zaś ω jest $k-$formą na N, możemy określić $k-$formę $F^*\omega$ na M w następujący sposób. Określamy

$$F^* dy_k = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial y_k}{\partial x_j} dx_j. \tag{3}$$

Tutaj M ma wymiar n, zaś w lokalnych współrzędnych odwzorowanie F zadaje się przez $(x_1, \dots, x_m) \xrightarrow{F} (y_1, \dots, y_n)$ i $y_k = y_k(x_1, \dots, x_m)$ jest $k-$tą składową odwzorowania F. Wzór (3) jest bardzo łatwy do zapamiętania.

W przypadku formy $\omega = f_{j_1 \dots j_k}(y_1, \dots, y_n) dy_{j_1} \wedge \dots \wedge dy_{j_k}$ definiujemy

$$\begin{aligned} F^*\omega(x_1, \dots, x_m) &= f_{j_1 \dots j_k}(y_1(x_1, \dots, x_m), \dots, y_n(x_1, \dots, x_n)) \cdot \\ &\cdot \left(\sum_{l_1=1}^{m} \frac{\partial y_{i_1}}{\partial x_{l_1}} dx_{l_1} \right) \wedge \dots \wedge \left(\sum_{l_k=1}^{m} \frac{\partial y_{i_k}}{\partial x_{l_k}} dx_{l_k} \right) = \\ &= \det \begin{pmatrix} \frac{\partial y_{i_1}}{\partial x_{l_1}} & \frac{\partial y_{i_1}}{\partial x_{l_2}} & \cdots & \frac{\partial y_{i_1}}{\partial x_{l_n}} \\ \frac{\partial y_{i_2}}{\partial x_{l_1}} & \frac{\partial y_{i_2}}{\partial x_{l_2}} & \cdots & \frac{\partial y_{i_n}}{\partial x_{l_n}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_{i_n}}{\partial x_{l_1}} & \frac{\partial y_{i_n}}{\partial x_{l_2}} & \cdots & \frac{\partial y_{i_n}}{\partial x_{l_n}} \end{pmatrix} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_n} \end{aligned}$$

3. Różniczka funkcji określona jest wzorem $df = f_1' dx_1 + \dots + f_n' dx_n$, i jest $1-$formą.

4.Różniczka zewnętrzna. Różniczka formy $f\, dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$ jest $k+1$ formą postaci $df \wedge dx_{i_1} \wedge \dots dx_{i_k}$. Różniczka kombinacji liniowej (o współczynnikach niezależnych od punktu x) form postaci $f\, dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$ jest sumą różniczek.
5.Całka z $n-$formy po podzbiorze otwartym $\mathbb{R}^n$. Jeśli $\omega = f(x)\, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ jest $n-$formą określoną na podzbiorze otwartym $U \subset \mathbb{R}^n$, to określamy

$$\int_U \omega = \int_U f(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 dx_2 \dots dx_n. \tag{4}$$

6.Zamiana zmiennych w całce. Jeśli $F : U \to V$ jest dyfeomorfizmem podzbiorów otwartych $\mathbb{R}^n$, zaś ω jest $n-$formą na V, to $\int_U F^*\omega = \int_V \omega$. Jest to wzór na zamianę zmiennych w całce z formy.
7.Całka z formy po rozmaitości. Niech M będzie $k-$wymiarową podrozmaitością w $\mathbb{R}^n$, $U \subset \mathbb{R}^k$ zbiorem otwartym, $F\colon U \to \mathbb{R}^n$ parametryzuje zbiór M. Wtedy, dla dowolnej $k-$formy ω na M określamy $\int_M \omega = \int_U F^*\omega$. Z punktu (6) wynika, iż całka $\int_M \omega$ nie zależy od wyboru parametryzacji $F\colon U \to M$.

Najważniejszym twierdzeniem rachunku form różniczkowych jest twierdzenie Stokesa, które uogólnia twierdzenie Gaussa–Greena–Ostrogradzkiego.

Twierdzenie 2. Niech $M \subset \mathbb{R}^n$ będzie $k+1$ wymiarową podrozmaitością zorientowaną z brzegiem ∂M. Niech ω będzie $k-$formą określoną na pewnym otoczeniu U zbioru M. Wtedy

$$\int_{\partial M} \omega = \int_M d\omega. \tag{5}$$

Aby zobaczyć, że twierdzenie Stokesa jest uogólnieniem twierdzenia Greena, podajmy kilka prostych w dowodzie faktów.

Lemat 1. Jeśli $M \subset \mathbb{R}^n$ jest rozmaitością $(n-1)-$wymiarową, zaś $v = (v_1, \dots, v_n)$ jest polem wektorowym na $\mathbb{R}^n$. Określmy formę ω_v wzorem

$$\begin{aligned} \omega_v = {} & v_1 dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n - v_2 dx_1 \wedge dx_3 \wedge \dots \wedge dx_n + \\ & + v_3 dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_4 \wedge \dots \wedge dx_n + \dots + (-1)^{n-1} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n. \end{aligned}$$

Wtedy

$$\int_M \omega_v = \int_M v \cdot \vec{n}\, dvol(M).$$

Lemat 2. Jeśli $v = (v_1, \dots, v_n)$ i ω_v jest określona jak w Lemacie 1, to

$$d\omega_v = \operatorname{div} v\, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n.$$

2. Całkowanie przez części. Zadania

2.1. **Manipulacje wzorami.**

Zadanie 1. Wykazać, że jeśli u jest funkcją, a X polem wektorowym, to $\operatorname{div}(uX) = u \operatorname{div}(X) + Xu$, gdzie Xu oznacza pochodną kierunkową funkcji u w kierunku X.

Zadanie 2. Udowodnić następujący analog wzoru Leibniza. Jeśli $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ są klasy C^1, to

$$\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f.$$

Zadanie 3. Wyprowadź pierwszy wzór Greena:

$$-\int\limits_{\Omega} u\,\Delta v = \int\limits_{\Omega} \langle \nabla u, \nabla v\rangle - \int\limits_{\partial\Omega} u\left(\frac{\partial v}{\partial n}\right),$$

gdzie $\frac{\partial v}{\partial n}$ oznacza pochodną kierunkową funkcji v w kierunku wektora normalnego do brzegu (tzn. prostopadłego) skierowanego na zewnątrz.

Zadanie 4. Wykazać, że jeśli funkcja $f : \Omega \to \mathbb{R}$ jest klasy C^2 to

$$\operatorname{div} \nabla f = \Delta f,$$

gdzie Δ jest operatorem Laplace'a (zob. (6)).

Zadanie 5. Wyprowadzić drugi wzór Greena:

$$\int\limits_{\Omega} u\,\Delta v + \int\limits_{\Omega} \Delta u\ v = \int\limits_{\partial\Omega} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right) v - u\left(\frac{\partial v}{\partial n}\right)\right].$$

Zadanie 6. Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otwarty, zaś $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ harmoniczna (spełnia $\Delta u = 0$, zob. część 3). Niech $U \subset \Omega$ będzie obszarem o gładkim brzegu, zaś $v\colon \overline{U} \to \mathbb{R}$ będzie klasy C^1 a ponadto

$$\forall x \in \partial U \;\; u(x) = v(x).$$

Wykazać, że

$$\int_U ||\nabla u(x)||^2 \le \int_V ||\nabla v(x)||^2.$$

Zadanie 7. Udowodnić twierdzenie o wartości średniej (zob. część 3.1), korzystając z wzorów Greena.

2.2. **Zasady zachowania.**

Zadanie 8. Niech $u(x,t)$, $x \in S^1, t \in \mathbb{R}^+$ będzie funkcją klasy C^2 spełniającą równanie struny

$$u''_{xx} - u''_{tt} = 0.$$

Niech

$$E_p(t) = \int_{S^1} u_x^2(x,t), \;\; E_k(t) = \int_{S^1} u_t^2(x,t).$$

Udowodnić zasadę zachowania energii $E_p + E_k = \text{const}$.

Zadanie 9. Uogólnić zasadę zachowania energii na przypadek wielowymiarowy. Mianowicie, niech Ω będzie ograniczonym obszarem w R^n o brzegu klasy C^1. zagadnienia struny $u_{tt} - \Delta u = 0$ w takim obszarze. Niech teraz u będzie rozwiązaniem takiego równania właśnie z warunkami $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ we wszystkich punktach brzegu. Definiujemy $E_k = \int_\Omega u_t^2 dx_1 \dots dx_n$ — energia kinetyczna, oraz $E_p = \int_\Omega (u_{x_1}^2 + \dots + u_{x_n}^2) dx_1 \dots dx_n$ — energia potencjalna. Udowodnić zasadę zachowania energii: $E_p + E_k = \text{const}$.

Zadanie 10. Rozpatrujemy równanie $u_t = u_{xx}$, $x \in (0,\pi)$, $t \in (0,\infty)$ na odcinku $(0,\pi)$ z warunkami brzegowymi $u'_x(t,0) = u'_x(t,1) = 0$ (von Neumanna).[3] Określamy $E(T) = \int u_x^2(T,x)dx$. Zbadać przebieg funkcji $E'(T)$. Wykorzystać to do udowodnienia jednoznaczości rozwiązania w przypadku równania przewodnictwa $a = 1$. Zbadać, co zachowanie $E(T)$ przy $T \to \infty$.

2.3. **Obliczenia całek powierzchniowych.**

Zadanie 11. Obliczyć całkę z funckji z^n po torusie $T \subset \mathbb{R}^2$ sparametryzowanym przez

$$\begin{cases} x &= (R + r\cos\phi)\cos\theta \\ y &= (R + r\cos\phi)\sin\theta \\ z &= r\sin\phi, \end{cases}$$

gdzie $\phi, \theta \in (0, 2\pi)$, zaś R i r są ustalonymi liczbami dodatnimi takimi, że $r < R$.

Rozwiązanie. Znajdujemy macierz pochodnych parametryzacji

$$DF = \begin{pmatrix} -r\sin\phi\cos\theta & -(R + r\cos\phi)\sin\theta \\ -r\sin\phi\sin\theta & (R + r\cos\phi)\cos\theta \\ r\cos\phi & 0 \end{pmatrix}.$$

[3][MB] Czy pochodną oznaczamy u_x, czy u'_x? Czy piszemy $u(t,x)$, czy $u(x,t)$?

Wtedy
$$DF^T \cdot DF = \begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & (R + r\cos\phi)^2 \end{pmatrix}.$$
W związku z tym pozostaje nam do policzenia całka
$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\phi (r\sin\phi)^n \cdot r(R+r\cos\phi) = 2\pi r^{n+1} \int_0^{2\pi} \sin^n\phi(R+r\cos\phi)d\phi.$$
Dla $n = 2k+1$ całka znika, natomiast dla $n = 2k$ mamy $\int_0^\pi \sin^{2k}\phi\cos\phi = -\int_\pi^{2\pi} \sin^{2k}\phi\cos\phi$. Pozostaje więc do policzenia wyrażenie
$$2\pi r^{2k+1} R \int_0^{2\pi} \sin^{2k}\phi\, d\phi = 8r^{2k+1} R \int_0^{\pi/2} \sin^{2k}\phi, d\phi.$$
Teraz
$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2k}\phi\, d\phi = \frac{1}{2} B(\frac{n+1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{\pi}{2^{2k+1}} \binom{2k}{k}.$$
Ostatecznie uzyskujemy odpowiedź
$$\int_T z^n = \begin{cases} 0: & n = 2k+1 \\ 8\pi^2 R \left(\frac{r}{2}\right)^{2k+1} \binom{2k}{k}: & n = 2k. \end{cases}$$
□

Zadanie 12. Obliczyć średnią wartość funkcji x_1^k po sferze $\{x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^n$ dla całkowitych dodatnich k i n.

Zadanie 13. Obliczyć pole powierzchni bocznej stożka $\{x^2 + y^2 = z^2, z \in [0,1]\}$, całkując funkcję 1 po odpowiedniej powierzchni.

Zadanie 14. Obliczyć długość krzywej zadanej parametrycznie przez $x = t\cos t$, $y = t\sin t$, gdzie $t \in [0, 2\pi]$.

Zadanie 15. Niech γ będzie krzywą w $\mathbb{R}^3$ zadaną parametrycznie przez $s \to (s, s^2, s^3)$, gdy $s \in [0,1]$. Każdy punkt γ łączymy odcinkiem z punktem $(0,0,0)$. Obliczyć objętość tak uzyskanego zbioru.

Zadanie 16. Obliczyć całkowity strumień pola $(x^2+y^2, y^2+z^2, z^2+x^2)$ przez brzeg sześcianu $V = \{|x| \le a,\ |y| \le a,\ |z| \le a\}$.

Zadanie 17. Obliczyć całkowity strumień pola
$$\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \right)$$
przez powierzchnię elipsoidy $E = \{x^2 + \frac{1}{4}y^2 + \frac{1}{9}z^2 = 4\}$.

Rozwiązanie. Zamiast liczyć brutalnie, zastosujemy wzór Greena. Zauważmy, że pole wektorowe

$$v = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \right)$$

ma znikającą dywergencję w $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$. Gdyby E było brzegiem obszaru w $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$, pierwszy wzór Greena powiedziałby, że całkowity strumień jest zero. Tak jednak nie jest i musimy postępować w inny sposób.

Niech V będzie obszarem zadanym przez

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2+y^2+z^2 \geq 1,\ x^2 + \frac{1}{4}y^2 + \frac{1}{9}z^2 \leq 4\}.$$

Wtedy $\operatorname{div} v = 0$ na V, ponadto $\partial V = E \cup -S$, gdzie $S = \{x^2+y^2+z^2 = 1\}$, a znak „–” oznacza, że bierzemy przeciwną orientację. Ze wzoru Greena (Twierdzenie 1):

$$\int_{-S} v \cdot n + \int_E v \cdot n = \int_V \operatorname{div} v = 0.$$

A zatem

$$-\int_S v \cdot n + \int_E v \cdot n = 0,$$

gdyż strumień pola przez $-S$ jest równy $(-1)\cdot$ strumień pola przez S. Czyli strumienie pola przez S i przez E są równe. Natomiast na S pole v jest równe polu $w = (x,y,z)$, gdyż $\sqrt{x^2+y^2+z^2} = 1$. A zatem

$$\int_S v \cdot n = \int_S w \cdot n = \int_{x^2+y^2+z^2 \leq 1} \operatorname{div} w = \int_{x^2+y^2+z^2 \leq 1} 3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 3 = 4\pi,$$

gdzie ponownie użyliśmy wzoru Greena. □

2.4. **Formy różniczkowe.**

Zadanie 18. Dla form $\omega = 2xdx + y^2zdy + 3xydz$ i $\eta = (x^3+y^5)dx \wedge dy + 2yzdy \wedge dz + 3ydx \wedge dz$ obliczyć $d\omega$, $d\eta$ oraz $\omega \wedge \eta$.

Rozwiązanie. Zauważmy, że $d(2xdx) = 0$. Istotnie, $d(2xdx) = d(2x) \wedge dx = 2dx \wedge dx = 0$. Jako, że $d(y^2z) \wedge dy = y^2dz \wedge dy = -y^2dy \wedge dz$ oraz $d(3xy) \wedge dz = 3ydx \wedge dz + 3xdy \wedge dz$, otrzymujemy

$$d\omega = (-y^2 + 3x)dy \wedge dz + 3ydx \wedge dz.$$

Przy obliczaniu $d\eta$ obserwujemy, że $d((x^3+y^5)dx \wedge dy) = d(2yzdy \wedge dz) = 0$. Istotnie, w pierwszym przypadku funkcja x^3+y^5 zależy tylko od x i y , zatem $d(x^3+y^5)$ będzie zawierało wyrazy tylko z dx i dy, które zostaną skasowane po wymnożeniu przez $dx \wedge dy$. Podobnie rozumujemy pokazując, że $d(yzdy \wedge dz) = 0$. Stąd

$$d\eta = d(3ydx \wedge dz) = 3dy \wedge dx \wedge dz = -3dx \wedge dy \wedge dz.$$

Policzmy teraz $\omega \wedge \eta$. W wyrażeniu

$$\big(2xdx + y^2zdy + 3xydz\big) \wedge \big((x^3 + y^5)dx \wedge dy + 2yzdy \wedge dz + 3ydx \wedge dz\big)$$

wymnażamy każdy element z nawiasu po lewej stronie przez każdy element nawiasu z prawej strony. Z dziewięciu możliwych do uzyskania składników sumy, niezerowe są tylko te, w których nie powtarza się żadne wyrażenie dx, dy, dz, a więc:

$$2xdx \wedge (2yzdy \wedge dz),\ \ y^2zdy \wedge (3ydx \wedge dz),\ \ 3xydz \wedge ((x^3 + y^5)dx \wedge dy).$$

Ostatecznie

$$\omega \wedge \eta = (4xyz - 3y^3z + 3x^4y + 3xy^5)dx \wedge dy \wedge dz.$$

Znak "-" przed $3y^3z$ bierze się stąd, że $dy \wedge dx \wedge dz = -dx \wedge dy \wedge dz$. □

Zadanie 19. Udowodnić Lemat 2

Zadanie 20. Używając wzoru Stokesa, obliczyć pole koła $x^2 + y^2 \leq 1$.

Rozwiązanie. Niech $\Omega = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$. Rozważmy formę $\omega = xdy$. Wtedy $d\omega = dx \wedge dy$ oraz

$$\int_\Omega 1 \cdot dxdy = \int_\Omega dx \wedge dy = \int_{\partial\Omega} \omega.$$

Aby policzyć ostatnią całkę parametryzujemy $\partial\Omega$ przez $t \xrightarrow{F} (x(t), y(t))$, gdzie $x(t) = \cos t$, $y(t) = \sin t$ oraz $t \in (0, 2\pi)$. Wtedy $F^*dy = \cos t\, dt$, więc $F^*\omega = \cos^2 t\, dt$ (osoby bardziej wprawne w rachunkach często opuszczają przy tych obliczeniach F^* pisząc po prostu $dy = \cos t\, dt$, $\omega = \cos^2 t\, dt$. Jak zwykle w takich przypadkach, jest to poprawne tak długo, jak nie prowadzi do nieporozumień). Zatem

$$\int_{\partial\Omega} \omega = \int_0^{2\pi} \cos^2 t\, dt = \pi.$$

□

Zadanie 21. Obliczyć pole obszaru w $\mathbb{R}^2$ ograniczonego krzywą $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$, $t \in [0, 2\pi]$ (asteroida).

Zadanie 22. Obliczyć całkę z formy $\omega = zdx + 4z^2dy + (6x - 8zy)dz$ po zbiorze określonym przez $\{x^2 + z^2 = 1.\ x^3 + 3y + z^3 = 2\}$.

Zadanie 23. Niech ω będzie formą określoną wzorem

$$\omega = \frac{(y-2)dx - (x+2)dy}{x^2+y^2+4x-4y+8} + \frac{(y-1)dx-(x+1)dy}{x^2+y^2+2x-2y+2},$$

zaś krzywa $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ zadana równaniem

$$\gamma = \{(x,y)\colon |x|^{4/3} + |y|^{5/4} = 2.$$

Oblicz $\int_\gamma \omega$.

Zadanie 24. Niech $M \subset \mathbb{R}^n$ będzie hiperpowierzchnią zadaną przez $f = 0$, gdzie ∇f nie równa się zero w żadnym punkcie M. Określamy

$$\omega_f = \frac{1}{||\nabla f||} \sum_{k=1}^{n} (-1)^k f'_k dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_k} \wedge \cdots \wedge dx_n.$$

Wykazać, że dla dowolnej funkcji $g : M \to \mathbb{R}$ całkowalnej na M zachodzi

$$\int_M g \cdot \omega_f = \int_M g \, dvol(M),$$

gdzie po lewej stronie stoi całka z $(n-1)$-formy, zaś po prawej całka z funkcji względem miary.

Zadanie 25. Wyprowadzić wzór Greena (Twierdzenie 1) z Twierdzenia Stokesa.

Zadanie 26. Udowodnić, że spośród wszystkich krzywych zamkniętych $\gamma \subset \mathbb{R}^2$, największe pole ogranicza okrąg.

Wskazówka: postępuj według następującego schematu.

1. Rozpatrzmy wszystkie krzywe $\gamma = (x(t), y(t))$, $t \in [0,1]$, klasy C^2, takie że $x(0) = x(1) = y(0) = y(1) = 0$. Wykaż, że każdą taką krzywą można przeparametryzować tak, aby $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 \equiv l^2$, gdzie l jest długością krzywej.
2. Zauważ, że dla krzywej γ, funkcjonał $L(x,y) = \int_0^1 x(t)\dot{y}(t)dt$ przyjmuje wartość równą polu obszaru ograniczonego przez γ.
3. Rozważ zagadnienie ekstremalne dla $L(\gamma)$ z mnożnikiem Lagrange'a $F(x,y) = \int_0^1 \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt$: napisz równanie Eulera–Lagrange'a dla
$$L(x,y) - \lambda F(x,y).$$
Zagadnienie jest dwuwymiarowe, więc będą dwa równania: jedno pochodzące od zaburzenia $x \to x + \delta_x$, drugie od $y \to y + \delta_y$. Dzięki wyborowi parametryzacji (punkt 1.) te równania mają stosunkowo prostą postać.
4. Rozwiąż otrzymane równania. Jako, że wiadomo, jaki ma wyjść wynik, rozwiązanie nie powinno być trudne.

3. Funkcje harmoniczne. Teoria

3.1. **Definicje.** Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ będzie podzbiorem otwartym (w ogólności rozmaitością riemannowską). Funkcję $f : \Omega \to \mathbb{R}$ nazwiemy *harmoniczną*, jeśli jest dwukrotnie różniczkowalna oraz spełnia równanie Laplace'a

$$\Delta f = 0,$$

gdzie

$$\Delta f = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}. \tag{6}$$

Wiadomo, że każda taka funkcja musi być analityczna. Poza tym ma szereg interesujących własności.

1. Pierwszą z nich jest *twierdzenie o wartości średniej.* Stanowi ono, że jeśli kula $B(x,r)$ jest zawarta w Ω, to

$$f(x) = \frac{\int_{B(x,r)} f(y)\,dy}{\int_{B(x,r)} 1\,dy} = \frac{\int_{S(x,r)} f(y)\,dS}{\int_{B(x,r)} 1\,dS}.$$

2. Ponadto mamy *zasadę maksimum*, która mówi, że funkcja harmoniczna *nie ma maksimów lokalnych.* W szczególności, jeśli Ω jest ograniczony, to

$$\sup\{f(x) \colon x \in \Omega\} = \sup\{f(x) \colon x \in \partial\Omega\}.$$

3. Funkcja harmoniczna na Ω jest ponadto analityczna w Ω.

Twierdzenie o wartości średniej sugeruje wprowadzenie następującej definicji

Definicja 1. Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ będzie podzbiorem otwartym.

(a) O funkcji lokalnie całkowalnej[4] (całkowalnej po zbiorach zwartych) $f \colon \Omega \to \mathbb{R}$ powiemy, że spełnia *twierdzenie o wartości średniej dla kuli*, jeśli $\forall x \in \Omega$ i $\forall r > 0$ takich, że kula $B(x,r) \subset \Omega$ zachodzi

$$f(x) = \frac{\int_{B(x,r)} f(y)\,dy}{\int_{B(x,r)} 1\,dy}.$$

(b) O funkcji ciągłej[5] $f \colon \Omega \to \mathbb{R}$ powiemy, że spełnia *twierdzenie o wartości średniej dla sfery*, jeśli $\forall x \in \Omega$ i $\forall r > 0$ takich, że kula

[4] [MB] Czy bawić się w takie definicje?

[5] [MB] Chciałoby się powiedzieć, lokalnie w jakiejś przestrzeni Sobolewa, takiej, że ślad jest całkowalny, ale to chyba bez sensu

$B(x,r) \subset \Omega$ zachodzi

$$f(x) = \frac{\int_{B(x,r)} f(y)\, dy}{\int_{B(x,r)} 1\, dy}.$$

Definicja 2. Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem otwartym z brzegiem klasy C^1. Niech $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ będzie ciągła. *Zagadnieniem Dirichleta* nazwiemy problem znalezienia funkcji klasy C^2 na Ω, ciągłej na brzegu takiej, że

$$f|_{\partial\Omega} = g,\ \Delta f(x) = 0, \text{ dla } x \in \Omega.$$

Definicja 3. Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem otwartym z brzegiem klasy C^1. Niech $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ będzie ciągła. Niech też $h \colon \Omega \to \mathbb{R}$ będzie ciągła *Zagadnieniem Poissona* nazwiemy problem znalezienia funkcji klasy C^2 na Ω, ciągłej na brzegu takiej, że

$$f|_{\partial\Omega} = g,\ -\Delta f(x) = h(x), \text{ dla } x \in \Omega.$$

3.2. **Funkcje Greena.** Zagadnienia Dirichleta i Poissona można rozwiązać, jeśli zna się tzw. funkcję Greena dla danego obszaru.

Definicja 4. Niech Ω będzie obszarem w $\mathbb{R}^n$, zaś *Funkcją Greena* dla obszaru Ω (z warunkami brzegowymi Dirichleta) nazywamy funkcję

$$\Phi \colon \bar{\Omega} \times \bar{\Omega} \colon \mathbb{R},$$

o tych własnościach, że

(a) Dla $x \in \Omega$ i $y \in \partial\Omega$ zachodzi $\Phi(x,y) = 0$.
(b) Dla $x \in \Omega$ zachodzi $-\Delta_y \Phi = \delta_x$, gdzie Δ_y oznacza laplasjan po współrzędnej y, δ_x jest dystrybucją δ Diraca (gęstością miary punktowej, miara punktu $\{x\}$ wynosi 1). Dla $y = x$ pochodne rozpatrujemy w sensie dystrybucyjnym.

Dla $\mathbb{R}^n$ funkcją Greena (zob. Zadanie 28 i 29) jest

$$\Phi(x,y) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \ln |x-y| & n = 2 \\ \frac{1}{n(n-2)\alpha(n)} \frac{1}{|x-y|^{n-2}} & n > 2. \end{cases}$$

Tutaj $\alpha(n)$ jest objętością jednostkowej kuli $n-$wymiarowej.

Wagę funkcji Greena można poznać po następującym twierdzeniu.

Twierdzenie 3. Niech Ω obszar w $\mathbb{R}^n$ o brzegu klasy C^1, $h \colon \Omega \to \mathbb{R}$ i $g \colon \partial\Omega \to \mathbb{R}$ będą ciągłe. Jeśli Φ jest funkcją Greena dla Ω, to funkcja $f \colon \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x) = -\int_{\partial\Omega} g(y) \frac{\partial\Phi}{\partial n_y}\, dvol(y) + \int_{\Omega} h(y)\Phi(x,y)\, dy \tag{7}$$

spełnia zagadnienie Poissona dla Ω z funkcjami g i h. Tutaj $\frac{\partial}{\partial n_y}$ oznacza pochodną kierunkową Φ w kierunku wektora normalnego, przy czym różniczkowanie jest po zmiennej y.

Kładąc $h = 0$ w (7) uzyskujemy rozwiązanie zagadnienia Dirichleta.

$$f(x) = -\int_{\partial\Omega} g(y)\frac{\partial\Phi}{\partial n_y}\, dvol(y). \tag{8}$$

Definicja 5. Funkcję $P(x,y)\colon \Omega \times \partial\Omega \to \mathbb{R}$ określoną wzorem

$$P(x,y) = \frac{\partial\Phi}{\partial n_y}(x,y)$$

nazywamy *jądrem Poissona* dla obszaru Ω. Wzór (8), który można zapisać jako

$$f(x) = -\int_{\partial\Omega} g(y)P(x,y)\, dvol(y).$$

nazywamy *wzorem Poissona*.

W wyznaczaniu funkcji Greena dla różnych obszarów przydatna może być interpretacja elektrostatyczna: przy ustalonym x funkcja Greena to jest potencjał elektrostatyczny wyznaczony przez ładunek jednostkowy znajdujący się w punkcie x oraz przez, być może, inne ładunki znajdujące się poza Ω, ale tak, by potencjał na $\partial\Omega$ był stale równy 0.

3.3. **Funkcje harmoniczne i funkcje holomorficzne.** W przypadku $n = 2$, a więc funkcji określonych na podzbiorach otwartych $U \subset \mathbb{R}^2$ mamy piękne i głębokie związki pomiędzy funkcjami harmonicznymi a funkcjami holomorficznymi (zob. [Rudin, Rozdział 10nn]). Przypomnijmy definicję.

Definicja 6. Niech $U \subset \mathbb{C}$. Funkcję $F : U \to \mathbb{C}$ nazwiemy *holomorficzną*, jeśli $\forall z_0 \in U$ spełniony jest jeden z następujących, równoważnych warunków.

- Istnieje granica $\lim\limits_{w\to 0, w\in\mathbb{C}} \frac{F(z_0+w)-F(z_0)}{w}$;
- Pochodna funkcji F (traktowanej jako funkcja z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}^2$) ma postać $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ dla pewnych a, $b \in \mathbb{R}$;
- Jeśli zapiszemy $z = x + iy$ zaś $F(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, to $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ oraz $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial v}$;
- Forma różniczkowa $F(z)dz = F(z)dx + iF(z)dy$ jest zamknięta.

Mamy następujące fakty.

Lemat 3 (uproszczony wzór całkowy Cauchy'ego)**.** Jeśli $f\colon U \to \mathbb{C}$ jest holomorficzna, zaś koło $B(z_0, r) \subset U$, to

$$\int_{\partial B(z_0,r)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0).$$

Całkę po prawej stronie można rozumieć albo w sensie funkcji analitycznych (ob. Rudin...), albo jako całkę z 1−formy.

Parametryzując brzeg $\partial B(z_0, r)$ przez $z = z_0 + re^{it}$, gdzie $t \in [0, 2\pi]$, uzyskujemy (wstawiając $dz = ire^{it}dt$)

$$\int_{\partial B(z_0,r)} = \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{it})}{re^{it}} ire^{it}dt = i \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})dt =$$
$$= \frac{i}{r} \int_{\partial B(z_0,r)} f(z)\, dvol.$$

Całka po prawej stronie jest całką względem miary na okręgu. W takim wypadku ze wzoru całkowego Cauchy'ego uzyskujemy

$$\frac{1}{2\pi r} \int_{\partial B(z_0,r)} f(z)\, dvol = f(z_0), \tag{9}$$

inaczej mówiąc, wartość funkcji holomorficznej w punkcie z_0 jest średnią z jej wartości po okręgu $\partial B(z_0, r)$.

3.4. **Funkcje subharmoniczne.** Przypomnijmy następującą definicję

Definicja 7. Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Funkcję $f\colon \Omega \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ nazwiemy *półciągłą z góry*, jeśli dla każdego $a \in \mathbb{R}$, zbiór $\{x \subset \Omega\colon f(x) < a\}$ jest otwarty w Ω, bądź, równoważnie, jeśli dla każdego $x_0 \in \Omega$ zachodzi

$$\limsup_{x \to x_0} f(x) \le f(x_0).$$

Tutaj ograniczymy się do podania definicji funkcji subharmonicznej (zob [Krantz, Rozdział 2]).

Definicja 8. Funkcję $f\colon \Omega \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, półciągłą z góry nazwiemy *subharmoniczną* jeśli dla każdego $x \in \Omega$ i każdego r takiego, że $\overline{B}(x, r) \subset \Omega$ oraz dla dowolnej funkcji harmonicznej $h\colon B(x, r) \to \mathbb{R}$ ciągłej na $\overline{B}(x, r)$, warunek

$$f(x) \le h(x) \text{ dla wszystkich } x \in \partial B(x, r)$$

implikuje warunek

$$f(x) \le h(x) \text{ dla wszystkich } x \in B(x, r).$$

Funkcje subharmoniczne, mają całe mnóstwo ważnych własności, które podamy w części poświęconej zadaniom. Ogólnie rzecz biorąc, funkcje subharmoniczne przypominają pod wielu względami funkcje wypukłe.

4. Funkcje harmoniczne. Zadania

Zadanie 27. Udowodnić, że jeśli $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otwarty i $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ jest klasy C^3 i jest harmoniczna, to dla dowolnego wektora $v \in \mathbb{R}^n$, pochodna kierunkowa $v \cdot \nabla f$ jest harmoniczna.

Zadanie 28. Niech $n > 2$. Sprawdzić bezpośrednio z definicji, że funkcja

$$u(x_1, \ldots, x_n) = \left(x_1^2 + \cdots + x_n^2\right)^{2-n}$$

jest harmoniczna na $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Zadanie 29. Wykazać, że funkcja

$$u(x, y) = \ln\left|x^2 + y^2\right|$$

jest harmoniczna w $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

Zadanie 30. Znaleźć wszystkie funkcje $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \colon \mathbb{R}$, które są harmoniczne i sferycznie symetryczne (to znaczy $f(x_1, \ldots, x_n) = u(r)$ dla pewnego u, przy czym $r = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$

(a) $n = 2$;
(b) $n > 2$.

Porównać otrzymane wyniki z Zadaniami 28 i 29.

Zadanie 31. Wykazać, że każda funkcja klasy C^2 na zbiorze otwartym $Omega \subset \mathbb{R}^n$ jest harmoniczna wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia twierdzenie o wartości średniej.

Zadanie 32. Niech $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą, która spełnia twierdzenie o wartości średniej. Niech $\eta\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ będzie dowolną funkcją całkowalną, taką, że $\int_{\mathbb{R}^n} \eta(||x||)\, dx = 1$. Wykazać, że

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\eta(||x - y||)\, dy = f(x).$$

Wskazówka: albo skorzystać z twierdzenia o wartości średniej dla kuli (trudniejsza wersja) i pokazać dla η — funkcja charakterystyczna, funkcja prosta i przejście graniczne; albo z twierdzenia o wartości średniej dla sfery i twierdzenia Fubiniego.

Zadanie 33. Wykazać, że funkcja ciągła na $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, jeśli spełnia twierdzenie o wartości średniej, to jest klasy C^∞. Wskazówka: wziąć η z zadania 32 gładkie o nośniku zawartym w przedziale $(0, \varepsilon)$.

Zadanie 34. Udowodnić, że granica niemal jednostajnego ciągu funkcji harmonicznych jest harmoniczna. Wskazówka: Zadanie 33.

Zadanie 35. Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otwarty, zaś $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ będzie harmoniczna i ograniczona przez M. Wykaż, że istnieje taka stała $C > 0$ zależąca jedynie od n, że dla dowolnych dwóch punktów $x, y \in \Omega$, jeśli $r > 0$ będzie takie, że $B(x,r) \subset \Omega$ i $B(y,r) \subset \Omega$, to

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{CM}{r}.$$

Zadanie 36. Wykazać, że funkcja harmoniczna na $\mathbb{R}^n$ ograniczona jest stała. Wskazówka: zadanie 35.

Zadanie 37. Niech $B = B(0,2r) \subset \mathbb{R}^n$ będzie kulą o promieniu $3r > 0$, zaś $u\colon \overline{B} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją harmoniczną w B, taką, że $u(x) \geq 0$ dla wszystkich $x \in B(0,r)$. Wykazać, że dla dowolnych $x, y \in B(0,r)$ zachodzi

$$u(x) \leq 3^{3n} u(y).$$

Wskazówka. Połączyć x i y odcinkiem i weź punkty w, z odpowiednio w $1/3$ i $2/3$ tego odcinka. Następnie zastosować twierdzenie o wartości średniej, aby wykazać, że $u(x) \leq 3^n u(w)$ i dalej $u(w) \leq 3^n u(z)$, $u(z) \leq 3^n u(x)$.

Zadanie 38. Posłużyć się powyższym zadaniem do dowodu *nierówności Harnacka*: dla dowolnego obszaru $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ograniczonego, i podzbioru otwartego $U \subset \Omega$ takiego, że $\overline{U} \subset \Omega$, istnieje stała $C > 0$ o tej własności, że jeśli $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ jest harmoniczna oraz $u(x) \geq 0$, to

$$\sup_{x \in U} u(x) \leq C \inf_{x \in U} u(x).$$

Zadanie 39. Niech $U \subset \mathbb{R}^n$, $n > 1$ będzie otwarty, zaś $x_0 \in U$. Przypuśćmy, że dana jest funkcja $F : U \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ harmoniczna i ograniczona. Wykazać, że F przedłuża się do funkcji ciągłej $\tilde{F}\colon U \to \mathbb{R}$ i $\tilde{F}$ jest harmoniczna.

Zadanie 40. Scharakteryzować funkcje harmoniczne w $\mathbb{R}^1$. Znaleźć funkcję Greena dla warunków d'Alemberta dla odcinka $[a,b]$. Przedyskutować sytuację dla warunków von Neumanna.

Zadanie 41. Niech $f : \Omega \to \mathbb{R}$ będzie funkcją harmoniczną, której wszystkie punkty krytyczne (miejsca takie, że $\nabla f = 0$) mają niezdegenerowany hessjan (macierz drugich pochodnych). Wykazać, że równanie Laplace'a nie pozwala na to, aby hessjan był dodatnio (ani też ujemnie) określony, więc takie f nie może mieć lokalnych maksimów ani minimów.

Zadanie 42. Rozważmy torus $S^1 \times S^1$, na którym współrzędne oznaczymy przez x i y. Znaleźć wartości własne operatora Laplace'a $\Delta = \partial_{xx} + \partial_{yy}$.

Zadanie 43. Zbadać zagadnienie własne operatora Laplace'a $\Delta = \partial_{xx} + \partial_{yy}$ z tym, że na prostokącie $L = [0,a] \times [0,b]$ z warunkiem brzegowym $u|_{\partial L} = 0$.

4.1. **Laplasjan w różnych układach współrzędnych.**

Zadanie 44. Niech $\Delta = \partial^2_{xx} + \partial^2_{yy}$ będzie dwuwymiarowym laplasjanem. Znaleźć jego postać we współrzędnych biegunowych (r, ϕ).

Zadanie 45. Wykonać trochę żmudniejsze rachunki, aby wyznaczyć postać trójwymiarowego laplasjanu we współrzędnych sferycznych (r, ψ, ϕ),

$$x = r \sin\phi \sin\psi,\ y = r\sin\phi\cos\psi,\ z = r\cos\phi.$$

Zadanie 46. Wykazać, możliwie najprościej, że laplasjan jest niezmienniczy przy ortogonalnej zamianie zmiennych, to znaczy, że przy przejściu do układu ortogonalnego, postać laplasjanu nie zmienia się.

Zadanie 47. Znaleźć postać Laplasjanu we współrzędnych walcowych $x = r\sin\phi$, $y = r\cos\phi$, $z = z$.

Zadanie 48. Znaleźć postać laplasjanu we współrzędnych sferycznych w $\mathbb{R}^4$ zadanych przez

$$\begin{aligned} x &= r\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma \\ y &= r\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma \\ z &= r\cos\alpha\sin\beta \\ u &= r\sin\alpha. \end{aligned}$$

Rozwiązanie. Na tym przykładzie pokażemy pewien uniwersalny sposób postępowania, wykorzystujący fakt, iż $\Delta F = \operatorname{div}\nabla F = *d*dF$, gdzie d jest różniczkowaniem form zaś $*$ jest operatorem gwiazdki Hodge'a.

Zauważmy, że w zadanym punkcie przestrzeni, wektory styczne

$$\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial u} \text{ oraz } \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \alpha}, \frac{\partial}{\partial \beta}, \frac{\partial}{\partial \gamma}$$

powiązane są następującymi relacjami.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial r} &= \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\frac{\partial}{\partial x} + \cos\alpha\cos\beta\sin\gamma\frac{\partial}{\partial y} + \\
&+ \cos\alpha\sin\beta\frac{\partial}{\partial z} + \sin\alpha\frac{\partial}{\partial u} \\
\frac{\partial}{\partial \alpha} &= -r\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma\frac{\partial}{\partial x} - r\sin\alpha\cos\beta\sin\gamma\frac{\partial}{\partial y} + \\
&- r\sin\alpha\sin\beta\frac{\partial}{\partial z} + r\cos\alpha\frac{\partial}{\partial u} \\
\frac{\partial}{\partial \beta} &= -r\cos\alpha\sin\beta\cos\gamma\frac{\partial}{\partial x} - r\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma\frac{\partial}{\partial y} + \\
&+ r\cos\alpha\cos\beta\frac{\partial}{\partial z} \\
\frac{\partial}{\partial \gamma} &= -r\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma\frac{\partial}{\partial x} + r\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\frac{\partial}{\partial y}.
\end{aligned}
$$

Jako, że wektory $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial u}$ tworzą bazę ortonormalną przestrzeni stycznej (w standardowej metryce w $\mathbb{R}^4$) możemy sprawdzić, że wektory $\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \alpha}, \frac{\partial}{\partial \beta}, \frac{\partial}{\partial \gamma}$ są wzajemnie prostopadłe, zaś ich długość równa jest odpowiednio

$$1,\ r,\ r\cos\alpha,\ r\cos\alpha\cos\beta.$$

A zatem wektory

$$\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \alpha}, \frac{1}{r\cos\alpha}\frac{\partial}{\partial \beta}, \frac{1}{r\cos\alpha\cos\beta}\frac{\partial}{\partial \gamma}$$

Tworzą bazę ortonormalną przestrzeni stycznej. Stąd wynika, że formy

$$
\begin{aligned}
e_1 &= dr \\
e_2 &= r d\alpha \\
e_3 &= r\cos\alpha d\beta \\
e_4 &= r\cos\alpha\cos\beta d\gamma
\end{aligned}
$$

tworzą bazę ortonormalną przestrzeni kostycznej. Czyli $*e_1 = e_2 \wedge e_3 \wedge e_4$, $*e_2 = -e_3 \wedge e_4 \wedge e_1$, $*e_3 = e_4 \wedge e_1 \wedge e_2$ i $*e_4 = -e_1 \wedge e_2 \wedge e_3$ oraz

$*e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4 = 1$. A zatem

$$\begin{aligned} *dr &= r^3 \cos^2\alpha \cos\beta d\alpha \wedge d\beta \wedge d\gamma \\ *d\alpha &= -r\cos^2\alpha\cos\beta d\beta \wedge d\gamma \wedge dr \\ *d\beta &= r\cos\beta d\gamma \wedge dr \wedge d\alpha \\ *d\gamma &= -\frac{r}{\cos\beta} dr \wedge d\alpha \wedge d\beta \end{aligned}$$

$$*dr \wedge d\alpha \wedge d\beta \wedge d\gamma = \frac{1}{r^3\cos^2\alpha\cos\beta}.$$

Mamy

$$dF = \frac{\partial F}{\partial r}dr + \frac{\partial F}{\partial \alpha}d\alpha + \frac{\partial F}{\partial \beta}d\beta + \frac{\partial F}{\partial \gamma}d\gamma.$$

A zatem

$$\begin{aligned} *dF =& \frac{\partial F}{\partial r} r^3\cos^2\alpha\cos\beta d\alpha \wedge d\beta \wedge d\gamma - \\ &- \frac{\partial F}{\partial \alpha} r\cos^2\alpha\cos\beta d\beta \wedge d\gamma \wedge dr + \\ &+ \frac{\partial F}{\partial \beta} r\cos\beta d\gamma \wedge dr \wedge d\alpha - \\ &- \frac{\partial F}{\partial \gamma}\frac{r}{\cos\beta} dr \wedge d\alpha \wedge d\beta. \end{aligned}$$

Policzenie $d * dF$ jest de facto jedynym miejscem, gdzie pojawiają się nieco bardziej złożone rachunki.

$$\begin{aligned} d * dF = \Bigg[& \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} r^3\cos^2\alpha\cos\beta + \frac{\partial F}{\partial r} 3r^2\cos^2\alpha\cos\beta + \\ &+ \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha^2} r\cos^2\alpha\cos\beta - \frac{\partial F}{\partial \alpha} 2r\sin\alpha\cos\alpha\cos\beta + \\ &+ \frac{\partial^2 F}{\partial \beta^2} r\cos\beta - \frac{\partial F}{\partial \beta} r\sin\beta + \\ &+ \frac{r}{\cos\beta}\frac{\partial^2 F}{\partial \gamma^2} \Bigg] dr \wedge d\alpha \wedge d\beta \wedge d\gamma. \end{aligned}$$

Stąd uzyskujemy

$$\begin{aligned} \Delta F = *d*dF =& \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \alpha^2} + \frac{1}{r^2\cos^2\alpha}\frac{\partial^2 F}{\partial \beta^2} + \frac{1}{r^2\cos^2\alpha\cos^2\beta}\frac{\partial F}{\partial \gamma^2} + \\ &+ \frac{3}{r}\frac{\partial F}{\partial r} - \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{r^2}\frac{\partial F}{\partial \alpha} + + \frac{-\operatorname{tg}\beta}{r^2\cos^2\alpha}\frac{\partial F}{\partial \beta}. \end{aligned}$$

$\square$

Uwaga 3. Powyższa metoda jest skuteczna, dzięki temu, że macierz DF pochodnej zamiany zmiennych $(r,\alpha,\beta,\gamma) \xrightarrow{F} (x,y,z,u)$ ma taką własność, że $DF \cdot DF^T$ jest diagonalna. Dzięki temu wektory $\frac{\partial}{\partial r}$, $\frac{\partial}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial}{\partial \beta}$ i $\frac{\partial}{\partial \gamma}$ były ortogonalne i gwiazdka Hodge'a miała stosunkowo prostą postać.

Zadanie 49. Niech $R > r_0 > 0$. Udowodnić, że wzór

$$\begin{aligned} x &= (R + r\cos\phi)\cos\theta \\ y &= (R + r\cos\phi)\sin\theta \\ z &= r\sin\phi \end{aligned}$$

dla $\phi, \theta \in [0, 2\pi]$ oraz r bliskich r_0 zadaje lokalny układ współrzędnych w $\mathbb{R}^3$ w otoczeniu torusa $\{(x^2 + y^2 + z^2 - R^2 - r_0^2)^2 + 4R^2z^2 = 4r_0^2R^2\}$. Wyrazić Δf we współrzędnych r, ϕ, θ.

4.2. **Funkcje Greena.**

Zadanie 50. Wyznaczyć funkcję Greena dla obszaru

$$\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \colon x_1 > 0\}.$$

Rozwiązanie. Jeśli położymy $\Phi(x,y) = \frac{1}{4\pi}|x-y|^{-1}$ (funkcja Greena dla $\mathbb{R}^3$), nie będzie spełniony warunek, żeby Φ znikała dla $y_1 = 0$. Z pomocą przychodzi nam interpretacja fizyczna, jako potencjału. Sugeruje to, że trzeba dołożyć gdzieś w $\mathbb{R}^3$ taki ładunek, aby zrównoważyć potencjał na płaszczyźnie $y_1 = 0$. To jest bardzo proste: musimy umieścić go symetrycznie po drugiej stronie płaszczyzny i dać mu znak przeciwny. Powyższe rozważania sugerują (ale nie dowodzą), że funkcja

$$G(x,y) = \Phi((x_1, x_2, x_3), y) - \Phi((-x_1, x_2, x_3), y).$$

powinna być funkcją Greena dla półpłaszczyzny. Pozostawiamy czytelnikowi sprawdzenie, że tak jest w istocie. $\square$

Zadanie 51. Znaleźć funkcję Greena dla koła $B(0,1) \subset \mathbb{R}^n$.

Rozwiązanie. Spróbujemy postąpić podobnie, to znaczy, umieścić symetrycznie drugi ładunek tak, aby się zniosły na brzegu koła. Tutaj symetrią będzie inwersja względem koła, a więc przekształcenie

$$x \to i(x) = \frac{x}{|x|^2}.$$

Pokazanie, że to działa wymaga trochę pracy. Zauważmy, że jeśli $\Phi(x,y)$ jest funkcją Greena dla $\mathbb{R}^n$, to funkcja

$$\tilde{\Phi}(x,y) = \Phi(|x|i(x), |x|y)$$

nadal jest harmoniczna względem y. Łatwo sprawdzić, że dla $|x| = 1$ obie funkcje się pokrywają, zatem

$$G(x,y) = \Phi(x,y) - \tilde{\Phi}(x,y)$$

jest szukaną funkcją Greena. $\square$

Zadanie 52. Wyprowadzić następujący wzór Poissona dla koła jednostkowego $B(0,1)$ w $\mathbb{R}^2$.

$$u(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Re}\left(\frac{e^{it}+x}{e^{it}-x}\right) f(e^{it})\,dt, \tag{10}$$

gdzie $x \in B(0,1)$, f jest funkcją graniczną.

Rozwiązanie. Jako, że całka po prawej stronie jest równa

$$\frac{1}{2\pi}\int_{S(0,1)} \operatorname{Re}\left(\frac{y+x}{y-x}\right) f(y)\,dy,$$

wystarczy pokazać, że pochodna normalna funkcji Greena dla okręgu jest równa

$$\frac{1}{2\pi}\operatorname{Re}\left(\frac{y+x}{y-x}\right),$$

gdzie dzielenie rozumiemy w sensie dzielena liczb zespolonych. Teraz zauważmy, że zgodnie z Zadaniem 51 funkcja Greena jest równa

$$\frac{1}{2\pi}(-\ln|x-y| + \ln|\frac{x}{|x|^2} - y| - \ln|x|),$$

przy czym ostatni wyraz zeruje się przy różniczkowaniu po y. Przy ustalonym u pochodna w kierunku normalnym funkcji $\ln|u-y|$, dla $|y| = 1$ jest równa

$$\frac{(u_1-y_1)y_1 + (u_2-y_2)y_2}{|u-y|}.$$

Stąd pochodna funkcji Greena dla $y \in S^1$ w kierunku normalnym jest równa

$$\frac{(y_1-x_1)y_1 + (y_2-x_2)y_2}{|x-y|^2} - \frac{(y_1 - \frac{x_1}{|x|^2})y_1 + (y_2 - \frac{x_2}{|x|^2})y_2}{|\frac{x}{|x|^2} - y|^2},$$

gdzie piszemy $x = (x_1, x_2)$ i $y = (y_1, y_2)$. Skoro $|y| = 1$, to $|y - x| = |y - \frac{x}{|x|^2}| \cdot |x|$. Tak więc powyższy wzór sprowadza się do

$$\begin{aligned} &\frac{(y_1-x_1)y_1 + (y_2-x_2)y_2 - (|x|^2y_1 - x_1)y_1 - (|x|^2y_2 - x_2)y_2}{|y-x|^2} = \\ &= \frac{(y_1^2+y_2^2)(1-|x|^2)}{|y-x|^2} \end{aligned} \tag{11}$$

Skoro $y_1^2 + y_2^2 = 1$, mamy $y = y_1 + iy_2$, $x = x_1 + ix_2$. Tak więc

$$|y|^2(1 - |x|^2) = |y|^2 - |x|^2 = \operatorname{Re}(y + x)(\bar{y} - \bar{x}).$$

Czyli (11) staje się

$$\operatorname{Re} \frac{y + x}{y - x}.$$

□

Zadanie 53. Znaleźć funkcję Greena dla obszaru $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4, 0 < x_1 < 1\}$.

Zadanie 54. Znaleźć funkcję Greena dla wycinka płaszczyzny:

$$\{(x_1, x_2)\colon\ x_2 > 0, x_1 > 0, x_1 < \alpha x_2\},$$

gdzie $\alpha = \operatorname{tg} \frac{\pi}{k}, k \in \mathbb{N}$.

Zadanie 55. Wykazać, że funkcja Greena $G(x, y)$ dla ćwiartki półpłaszczyzny dąży do zera przy $||y|| \to \infty$ niemal jednostajnie po x.

Zadanie 56. Znaleźć funkcję Greena dla warunków von Neumanna (tzn. $\frac{\partial G}{\partial n} = 0$ na brzegu obszaru) dla wycinka płaszczyzny: $\{(x_1, x_2)\colon\ x_2 > 0, x_1 > 0, x_1 < \beta x_2\}$, gdzie $\beta = \operatorname{tg} \frac{2\pi}{k}, k \in \mathbb{N}$.

Zadanie 57. Znaleźć funkcję Greena dla zbioru $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus B(0, 1)$, gdzie B jest dyskiem o promieniu 1. Wykaż, że znika ona w nieskończoności.

Zadanie 58. Znaleźć funkcję Greena dla obszaru $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, 0 < x_1 < 1\}$.

Zadanie 59. Znaleźć funkcję Greena dla wycinka płaszczyzny:

$$\{(x_1, x_2)\colon\ x_2 > 0, x_1 > 0, x_1 < \alpha x_2\},$$

gdzie $0 < \alpha < \infty$. To zadanie jest istotnie trudniejsze, niż zadanie 54.

Zadanie 60. Znaleźć funkcję Greena dla pierścienia $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\colon 1/4 < x_1^2 + x_2^2 < 1\}$.

Zadanie 61. Znaleźć rozwinięcie funkcji Greena dla kwadratu w szereg Fouriera. Sprawdź, że należy ona do L^2. Zbadać, dla jakich n funkcja Greena dla n–wymiarowego sześcianu należy do L^2.

4.3. **Funkcje harmoniczne i funkcje holomorficzne.**

Zadanie 62. Udowodnić równoważność warunków w Definicji 6

Zadanie 63. Niech $U \subset \mathbb{R}^2$ będzie zbiorem otwartym, zaś $f : U \to \mathbb{C}$ będzie funkcją klasy C^2. Przypuśćmy, że $\Delta f = 0$ oraz $\Delta(f^2) = 0$. Wykazać, że f albo $\overline{f}$ jest holomorficzna.

Zadanie 64. Korzystając z twierdzenia Stokesa udowodnić uproszczone twierdzenie całkowe Cauchy'ego dla funkcji $f \colon U \to \mathbb{C}$.

Rozwiązanie. Ustalmy punkt z_0 oraz $\varepsilon > 0$ dostatecznie małe. Niech $\Omega = B(z_0, r) \setminus B(z_0, \varepsilon)$. Oczywiście $\Omega \subset U$ (stosujemy oznaczenia z Lematu 3). Niech $\omega = \frac{f(z)}{z-z_0}dz$. Jako, że funkcja $\frac{f(z)}{z-z_0}$ jest holomorficzna na Ω jako iloraz dwóch funkcji holomorficznych, forma ω jest zamknięta na Ω, a więc z twierdzenia Stokesa:

$$\int_{\partial\Omega} \omega = \int_{\Omega} d\omega = 0.$$

Zauważmy, że $\partial\Omega = \partial B(z_0, r) \cup -\partial B(z_0, \varepsilon)$, gdzie $-$ oznacza, że bierzemy brzeg przeciwnie zorientowany. A zatem.

$$\int_{\partial B(z_0,r)} \omega = \int_{\partial B(z_0,\varepsilon)} \omega.$$

Pozostaje wyszacować ostatnią całkę.

Z ciągłości f w punkcie z_0 dla dowolnego $\delta > 0$, istnieje takie $\varepsilon > 0$, że jeśli $|z - z_0| \leq \varepsilon$, to $|f(z) - f(z_0)| < \delta$. Stąd

$$\left| \int_{B(z_0,\varepsilon)} \frac{f(z)}{z-z_0} dz - \int_{B(z_0,\varepsilon)} \frac{f(z_0)}{z-z_0} dz \right| \leq$$
$$\int_{\partial B(z_0,\varepsilon)} \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|}\, dvol \leq \int_{\partial B(z_0,\varepsilon)} \frac{\delta}{\varepsilon} =$$
$$= 2\pi\varepsilon\frac{\delta}{\varepsilon} = 2\pi\delta,$$

gdzie w pierwszej nierówności wykorzystaliśmy znany fakt, iż $|\int_\gamma f(z)dz| \leq \int_\gamma |f(z)|\, dvol$. □

Zadanie 65. Niech $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \colon 0 < |z| < 1\}$. Niech $h : \Omega \to \mathbb{R}$ będzie zadana wzorem $h(z) = \log |z|$.

(a) Wykazać, że h jest harmoniczna.
(b) Wykazać, że h nie jest częścią rzeczywistą żadnej funkcji holomorficznej na Ω.

Zadanie 66. Wyprowadzić twierdzenie o wartości średniej dla funkcji harmonicznych w $\mathbb{R}^2$ korzystając z analogicznego rezultatu dla funkcji holomorficznych.

Zadanie 67. Wyprowadzić wzór Poissona dla koła (Zadanie 51) korzystając ze wzoru całkowego Cauchy'ego.

Zadanie 68. Niech $g(\phi) : S^1 \to \mathbb{C}$ będzie funkcją klasy L^2. Wykazać, że następujące warunki są równoważne:

(a) rozwinięcie Fouriera funkcji g zawiera wyłącznie dodatnie wyrazy, to znaczy dla każdego $m \in \mathbb{Z}$, $m \leq 0$ zachodzi

$$\int_{S^1} g(\phi)\phi^m d\phi = 0$$

(b) istnieje funkcja $f(z) : B(0,1) \to \mathbb{C}$, holomorficzna, o tej własności, że $\lim_{r\to 1} f(re^{i\phi}) = g(\phi)$.

Wskazówka: rozważ funkcje harmoniczne h_1 i h_2 z $B(0,1) \to \mathbb{R}$ takie, że h_1 (odpowiednio h_2) na brzegu $C(0,1)$ są równe odpowiednio $\operatorname{Re} g$ i $\operatorname{Im} g$. Napisz równanie Cauchy'ego–Riemanna dla $h_1 + ih_2$.

4.4. **Funkcje subharmoniczne. Zadania.**

Zadanie 69. Udowodnić, że jeśli $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ będzie otwarty, zaś $f \colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ będzie funkcją półciągłą z góry, to istnieje ciąg f_j funkcji ciągłych na Ω, ograniczonych z góry, monotonicznie malejących i punktowo zbieżnych do f (jeśli w jakimś punkcie x_0, $f(x_0) = -\infty$, to wymagamy, żeby $f_j(x_0) \to -\infty$).

Wskazówka: Rozważyć funkcje $f_j(x) = \sup_{y\in\Omega} f(y) - j|x-y|$ dla $j = 1, 2, \dots$.

Zadanie 70. Niech $f \colon \Omega \to \mathbb{R}$ będzie półciągła z góry, zaś $K \subset \Omega$ będzie zbiorem zwartym. Wykazać, że f przyjmuje kres górny na K, tzn. istnieje $x_0 \in K$ takie, że $f(x_0) \geq f(x)$ dla wszystkich $x \in K$, natomiast nie musi przyjmować swojego kresu dolnego na K.

Zadanie 71. Niech $f \colon \Omega \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ będzie półciągła z góry. Wykazać, że f jest subharmoniczna wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $x \in \Omega$ i każdego $r > 0$ zachodzi

$$f(x) \leq \frac{\int_{B(x,r)} f(y)\, dy}{\int_{B(x,r)} dy}.$$

Zadanie 72. Udowodnić, że funkcja subharmoniczna nie ma lokalnych maksimów.

Zadanie 73. Niech f i g będą funkcjami subharmonicznymi na $\mathbb{R}^2$. Czy z tego wynika, że funkcje $\min(f,g)$ i $\max(f,g)$ są subharmoniczne?

Zadanie 74. Udowodnić, że funkcja $(x, y) \to \log(x^2 + y^2)$ jest subharmoniczna.

Zadanie 75. Niech $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ będzie subharmoniczna, zaś $\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wypukła i rosnąca. Wykazać, że $\phi \circ f$ jest subharmoniczna.

Zadanie 76. Niech $\Omega = (a, b) \subset \mathbb{R}^1$, zaś $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ będzie subharmoniczna. Wykazać, że jest wypukła.

Zadanie 77. Niech $f\colon \Omega \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ będzie subharmoniczna. Wykazać, że zbiór $E = \{x\colon f(x) = -\infty\}$ jest otwarty.

Zadanie 78. Niech $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ będzie subharmoniczna i klasy C^2. Wykazać, że $\Delta f \geq 0$.

Zadanie 79. Wykaż, że granica punktowa monotonicznie malejącego ciągu funkcji subharmonicznych jest subharmoniczna.

Zadanie 80. Niech $f : \Omega \to \mathbb{C}$, gdzie $\Omega \subset \mathbb{C}$ będzie funkcją holomorficzną. Wykazać, że dla wszystkich $p \geq 1$, funkcja $|f|^p$ jest subharmoniczna.

Literatura

[Arnold] W. I. Arnold, *Metody matematyczne mechaniki klasycznej*, PWN, Warszawa 1981.

[Birkholc] A. Birkholc, *Analiza matematyczna. Funkcje wielu zmiennych*, PWN, Warszawa 2002.

[Krantz] S. Krantz, *Teoria funkcji wielu zmiennych zespolonych*, PWN, Warszawa 1991.

[Rudin] W. Rudin, *Analiza rzeczywista i zespolona*, PWN, Warszawa 1998.

[Schwartz] L. Schwartz, *Kurs analizy matematycznej* t. I/II, PWN, Warszawa 1980.