TWIERDZENIE BESIKOWICZA–VITALIEGO.

MACIEJ BORODZIK

Twierdzenie 1 (zob. Dunford–Schwartz, t.I)**.** *Niech S, ρ będzie przestrzenią metryczną zwartą, zaś A dowolnym jej podzbiorem. Niech też $\mathcal{F}$ będzie rodziną podzbiorów domkniętych S o dodatnich średnicach o tej własności, że*

$$\forall x \in A, \ \ \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists F \in \mathcal{F} \colon x \in F, \mathrm{diam}(F) < \varepsilon. \tag{1}$$

Wtedy dla każdego $r > 1$ istnieje skończona lub przeliczalna rodzina $\{F_i\}$ parami rozłącznych zbiorów $\mathcal{F}$ takich, że

1. *Jeśli $\{F_i\}$ jest rodziną skończoną, to $A \in \bigcup F_i$.*
2. *Jeśli $\{F_i\}$ przeliczalna, to $\forall n \geq 1$ zachodzi.*

$$A \in F_1 \cup \cdots \cup F_n \cup \bigcup_{k=n+1}^{\infty} S(F_k, r \cdot \mathrm{diam}(F_k)), \tag{2}$$

gdzie $S(B,c)$ oznacza poduszkę *zbioru B o grubości c, czyli*

$$S(B,c) = \{x \in S : \rho(x,B) \leq c\}.$$

Dowód. Dowód twierdzenia podamy w trzech krokach. W pierwszym skonstruujemy zbiory F_i tak, żeby było dobrze. W dwóch następnych pokażemy, że jest dobrze.

Ustalmy najpierw takie liczby $t > 0$ i $s > 0$, że

$$r - t \geq 1 + s. \tag{3}$$

Takie liczby istnieją, pod warunkiem, że $r > 1$. Można na przykład brać $t = (r-1)/2$ oraz $s = (r-1)/3$. Poniżej $B(x,r)$ oznacza kulkę domkniętą o środku w x i promieniu r.

Krok 1. Konstrukcja zbiorów F_n. Jako zbiór F_1 bierzemy dowolny podzbiór, który przecina się niepusto z A. Przypuśćmy, że zbiory $F_1, \ldots, F_m$ zostały wybrane. Wtedy, jeśli

$$A \subset F_1 \cup \cdots \cup F_m,$$

to dowód jest zakończony. Załóżmy więc, że $\exists p \in A$ taki, że

$$p \notin F_1 \cup \cdots \cup F_m.$$

W takim przypadku podzbiór

$$S_m = S \setminus (F_1 \cup \cdots \cup F_m)$$

jest niepusty i otwarty w F. To znaczy, że pewna kulka otwarta o środku w p jest zawarta w S_m. W kulce otwartej siedzi mniejsza kulka domknięta.

Niech więc $\delta > 0$ będzie takie, że

$$B(p,\delta) \subset S_m.$$

Z założenia (1) istnieje taki zbiór $F \in \mathcal{F}$, zawierający p, którego średnica jest mniejsza niż $\delta/(1+s)$. Wtedy

$$F \subset B(p, \delta/(1+s)),$$

w szczególności

$$S(F, s\,\mathrm{diam}(F)) \subset B(p, \frac{s}{1+s}\delta).$$

Oznacza to, że $S(F, s \cdot \mathrm{diam}(F))$ jest zawarta w S_m.

Stąd mamy wniosek, że rodzina

$$\mathcal{F}_m = \{F \in \mathcal{F} \colon S(F, s \cdot \mathrm{diam}(F)) \subset S_m\} \tag{4}$$

jest niepusta. Niech

$$\varepsilon_m = \sup\{\mathrm{diam}(F) \colon F \in \mathcal{F}_m\}. \tag{5}$$

Z definicji $\varepsilon_m > 0$ oraz jest skończone na mocy zwartości S. Wybieramy zbiór F_{m+1} jako dowolny zbiór taki, że

$$F_{m+1} \in \mathcal{F}_m, \quad \text{oraz } \mathrm{diam}(F_{m+1}) \geq \frac{r-t}{r}\varepsilon_m. \tag{6}$$

W ten sposób indukcyjnie konstruujemy ciąg F_m.

Krok $\frac{3}{2}$. Zaczynamy pokazywać, że ta rodzina spełnia warunek (2). Zaprzeczenie tego warunku, brzmi

Istnieje takie $n \geq 1$, oraz punkt $p \in A$ taki, że

$$p \notin F_1 \cup \cdots \cup F_n \cup \bigcup_{k=n+1}^{\infty} S(F_k, r \cdot \mathrm{diam}(F_k)). \tag{7}$$

Dla ułatwienia przyjmiemy, że $n > 1$.

Z Kroku 1 wybierzmy sobie element F z rodziny $\mathcal{F}_n$ zawierający p. Inaczej mówiąc $S(F, s \cdot \mathrm{diam}(F))$ jest rozłączne z $F_1, \ldots, F_n$. Doprowadzimy do sprzeczności w każdym z dwóch poniższych przypadków:

A. $S(F, s \cdot \mathrm{diam}(F))$ jest rozłączne ze wszystkimi zbiorami F_k.
B. $S(F, s \cdot \mathrm{diam}(F))$ *nie* jest rozłączne ze wszystkimi zbiorami F_k.

Krok 2. Przypadek A.

Niech $\delta = \mathrm{diam}(F)$. Jeśli $S(F, s \cdot \mathrm{diam}(F))$ jest rozłączne ze wszystkimi zbiorami $F_1, \ldots, F_k$ dla ustalonego k, to F należy do rodziny $\mathcal{F}_k$ (zob. (4)). W szczególności mamy

$$\varepsilon_k \geq \delta.$$

Co oznacza, z warunku (6), że

$$\mathrm{diam}(F_k) \geq \frac{r-t}{r}\delta. \tag{8}$$

Niech $x_1, \ldots, x_k, \ldots$ będzie dowolnym ciągiem punktów w S takim, że $x_k \in F_k$. Wtedy dla $k > l$ mamy

$$S(F_k, s \cdot \mathrm{diam}(F_k)) \cap F_l = \emptyset,$$

z warunku (4). To jednak oznacza, że

$$\rho(x_k, x_l) \geq s\,\mathrm{diam}(F_k) \geq s\frac{r-t}{r}\delta.$$

Czyli ciąg x_k nie ma podciągu zbieżnego. Sprzeczność ze zwartością S.

Krok 3. Przypadek B.

Niech k będzie najmniejszym takim indeksem, że

$$S(F, s \cdot \mathrm{diam}(F)) \cap F_{k+1} \neq \emptyset.$$

Z faktu, że $F \in \mathcal{F}_n$ wnioskujemy, że $k \geq n$. Ponadto, dla wszystkich $l < k+1$ zachodzi

$$S(F, s \cdot \mathrm{diam}(F)) \cap F_l = \emptyset,$$

czyli F jest elementem rodziny $\mathcal{F}_l$. W szczególności $F \in \mathcal{F}_k$. Tak więc, na mocy (5)

$$\mathrm{diam}(F) \leq \varepsilon_k. \tag{9}$$

Niech q będzie dowolnym elementem z przecięcia $S(F, s \cdot \mathrm{diam}(F)) \cap F_k$.

Skoro p nie jest zawarte w $S(F_k, r\,\mathrm{diam}(F_k))$ wiemy, że

$$\rho(p, q) > r\,\mathrm{diam}(F_k).$$

Z drugiej strony, skoro $q \in S(F, s \cdot \mathrm{diam}(F))$, mamy

$$\rho(p, q) < (1 + s)\,\mathrm{diam}(F).$$

Stąd mamy dwustronne szacowanie

$$(r - t)\varepsilon_k \overset{(6)}{<} r\,\mathrm{diam}(F_k) < (1 + s)\,\mathrm{diam}(F) \leq (1 + s)\varepsilon_k.$$

Stąd dostajemy sprzeczność z definicją t i s, zobacz (3). $\square$

W dowodzie pokazujemy, że A można prawie pokryć zbiorami, które są rozłączne nie tylko na A, lecz także na całej przestrzeni S. Wnioskujemy, że A można pokryć rozłącznymi zbiorami z dokładnością do zbioru miary zero. Zanim do tego dojdziemy, musimy zdefiniować pokrycie Vitaliego.

Niech S, ρ będzie jak wyżej przestrzenią metryczną zwartą zaś μ dodatnią miarą borelowską i skończoną na S.

Definicja 1. Rodzina zbiorów domkniętych o niezerowych średnicach $\mathcal{F}$ *pokrywa A w sensie Vitaliego* jeśli spełniony jest warunek (1) oraz

$$\forall F \in \mathcal{F}, \mu(S(F, r \cdot \mathrm{diam}(F))) \leq R\mu(F). \tag{10}$$

Inaczej mówiąc poduszka zbioru nie ma drastycznie większej miary niż sam zbiór.

Twierdzenie 2. *Niech $\mathcal{F}$ będzie rodziną podzbiorów S pokrywających A w sensie Vitaliego. Wtedy istnieje co najwyżej przeliczalny ciąg rozłącznych zbiorów $F_1, \ldots, F_n, \ldots$ z rodziny $\mathcal{F}$, taki, że*

$$\mu(A \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} F_i) = 0.$$

Czyli zbiory F_k pokrywają prawie cały zbiór A.

Dowód. Jeśli istnieje taki ciąg skończony $F_1, \ldots, F_k$, że $A \subset F_1 \cup \cdots \cup F_k$, to jesteśmy w domu. Przypuśćmy zatem, że z Twierdzenia 1 wybraliśmy ciąg $F_1, \ldots$ o tej własności, że dla każdego $n \geq 1$ mamy

$$A \subset F_1 \cup \cdots \cup F_n \cup \bigcup_{k=n+1}^{\infty} S(F_k, r \cdot \mathrm{diam}(F_k)).$$

Oszacujemy, dla dużych n miarę zbioru

$$C_n = A \setminus (F_1 \cup \cdots \cup F_n) = \bigcup_{k=n+1}^{\infty} S(F_k, r \cdot \mathrm{diam}(F_k)).$$

Po pierwsze miara sumy zbiorów jest mniejsza niż suma miar. Mamy więc

$$\mu(C_n) \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \mu(S(F_k), r \cdot \mathrm{diam}(F_k)).$$

Z warunku (10) mamy

$$\mu(C_n) \leq R \sum_{k=n+1}^{\infty} \mu(F_k).$$

Teraz zbiory F_i są rozłączne. Niech

$$G_n = \bigcup_{k=n+1}^{\infty} F_k.$$

Wtedy $\mu(G_n) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \mu(F_k)$.

Mamy $\mu(G_n) \leq \mu(S) < \infty$ z założenia o skończoności miary. Ponadto

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = \emptyset.$$

Czyli $\mu(G_n) \to 0$. Ostatecznie

$$\mu(C_n) \leq R\mu(G_n) \to 0.$$

□

Definicja 2. Niech A będzie podzbiorem $\mathbb{R}^n$ miary dodatniej. *Punktem gęstości* zbioru A nazwiemy taki punkt $p \in A$, że

$$\lim_{r \to 0} \frac{\mu(A \cap B(p,r))}{\mu(B(p,r))} = 1. \tag{11}$$

Twierdzenie 3. *Niech G będzie zbiorem punktów gęstości A. Wtedy $\mu(A \setminus G) = 0$.*

Dowód. Niech $n, \delta > 0$ oznaczmy przez A_n zbiór

$$A_n = \{x \in A \colon \forall \delta > 0, \exists r < \delta, \frac{\mu(A \cap B(x,r))}{\mu(B(x,r))} < 1 - \frac{1}{n}.\} \tag{12}$$

Pokażemy, że dla dowolnego n mamy $\mu(A_n) = 0$. Przypuśćmy, że ta miara jest dodatnia Wybierzmy sobie takie pokrycie przeliczalne $\mathcal{C}$ zbioru A_n kulkami otwartymi, że

$$\sum_{C \in \mathcal{C}} \mu(C) \leq (1 + \frac{1}{n})\mu(A_n). \tag{13}$$

Niech $\mathcal{F}$ będzie rodziną wszystkich kulek domkniętych B o środkach w punktach z A_n takich, że

$$\frac{\mu(A \cap B)}{\mu(B)} < 1 - \frac{1}{n},$$

oraz B jest zawarty w jakimś zbiorze pokrycia $C \in \mathcal{C}$. Ta rodzina oczywiście pokrywa A_n w sensie Vitaliego.

Ponadto dla każdego $F \in \mathcal{F}$ mamy

$$\frac{\mu(A_n \cap B(x,r))}{\mu(B(x,r))} < \frac{\mu(A \cap B(x,r))}{\mu(B(x,r))} < 1 - \frac{1}{n}, \tag{14}$$

gdyż $A_n \subset (A)$.

Z Twierdzenia 2 istnieje taki ciąg rozłącznych kulek $F_1, \ldots, F_n, \ldots$, że jeśli przyjąć

$$A_0 = A_n \setminus (F_1 \cup \ldots),$$

to $\mu(A_0) = 0$. Niech $A_1 = A_n \setminus A_0$. Z nierówności (14) mamy, że dla każdej kulki F_k zachodzi

$$\mu(A_1 \cap F_k) \leq (1 - \frac{1}{n})\mu(F_k).$$

Stąd, sumując po k mamy

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_1 \cap F_k) \leq (1 - \frac{1}{n}) \sum_{k=1}^{\infty} \mu(F_k).$$

Z rozłączności kulek możemy zamienić sumę miar na miarę sumy. Ponadto suma $\bigcup F_k = A_1$ tak więc otrzymujemy

$$\mu(A_n) = \mu(A_1) \leq (1 - \frac{1}{n})\mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k). \tag{15}$$

Ale każda kulka jest F_k jest zawarta w pewnym zbiorze pokrycia C. W szczególności mamy

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k \subset \bigcup_{C \in \mathcal{C}} C.$$

W szczególności

$$\mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k \leq \sum_{C \in \mathcal{C}} \mu(C) \leq (1 + \frac{1}{n})\mu(A_n),$$

gdzie ostatnie nierówność wynika z warunku (13). Łącząc tę nierówność z nierównością (15) mamy

$$\mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k) \leq (1 - \frac{1}{n^2})\mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k).$$

Otrzymana sprzeczność dowodzi, że

$$\mu(A_n) = 0.$$

Biorąc sumę A_n po n naturalnych otrzymujemy tezę twierdzenia. $\square$