Materiały na ćwiczenia 14 marca 2008.
Maciej Borodzik

Zadanie 1. Stosując zamianę zmiennych (współrzędne biegunowe) oblicz całkę

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}dxdy.$$

Korzystając z tego oblicz całkę $\int_0^\infty e^{-x^2}dx$.

Zadanie 2. Oblicz moment bezwładności wydrążonej kuli o promieniu 1 i promieniu wydrążonego kawałka równym $r \in [0,1)$. Kula jest jednorodna, gęstość jest tak dobrana, żeby masa była równa 1.

Moment bezwładności zbioru A o gęstości punktowej $\rho(x,y,z)$ względem prostej l wyraża się przez całkę $\int_A \rho\,\mathrm{dist}((x,y,z),l)^2$. Zakładamy, że w tym przypadku prosta przechodzi przez środek kuli.

Pytanie. Jeśli dwie wydrążone kulki jak w powyższym zadaniu i promieniach wewnętrznych odpowiednio $0 \le r_1 < r_2 < 1$ staczają się po równi, to która z nich stoczy się szybciej?

Definicja 1. Niech M będzie rozmaitością klasy C^1, $B \subset M$ podrozmaitością zwartą zaś A jakąś abstrakcyjną rozmaitością zwartą. Niech $f : A \to M$ będzie klasy C^1. Powiemy, że f jest *transwersalne* do B w punkcie $y_0 \in B$ jeśli dla każdego punktu $x \in A$ takiego, że $f(x) = y_0$ zachodzi

$$f_*(T_xA) + T_{y_0}B = T_{y_0}M. \tag{1}$$

W powyższym wzorze znak „+” oznacza sumę przestrzeni algebraicznych. Powiemy, że f jest *transwersalne* do B (oznaczamy $f \pitchfork B$) jeśli jest transwersalne do B w każdym punkcie $y \in B$.

Uwaga 1. W szczególności, jeśli $f(A)$ jest rozłączne z B, to f jest transwersalne do B.

Uwaga 2. Jeśli $A \subset M$ jest podrozmaitością, to mówimy, że $A \pitchfork B$ wtedy, gdy odzworowanie identycznościowe z A do A jest transwersalne do B.

Zadanie 3. Wykaż, że jeśli B jest zbiorem jednopunktowym $\{y_0\}$ to f jest transwersalne do B wtedy i tylko wtedy, gdy y_0 nie jest wartością krytyczną f.

Przykład 1. Na poniższym rysunku lewe odwzorowanie nie jest transwersalne, zaś prawe jest.

Zadanie 4. Proste przykłady

(a) Jeśli $M = \mathbb{R}^2$ i B jest prostą zaś A jest jednowymiarowe, to $f \pitchfork B$ wtedy, gdy obraz $f(A)$ przecina pod niezerowym kątem B i żaden punkt $b \in B$ nie jest wartością krytyczną odwzorowania f.

(b) Jeśli M, B i A jak w punkcie (a), podaj przykład takiego f, że $f(A)$ przecina B pod niezerowym kątem, ale f nie jest transwersalne do A.

(c) Jeśli B jest prostą ale $M = \mathbb{R}^3$ i A jest też jednowymiarowe, to $f \pitchfork B$ wtedy, gdy obraz $f(A)$ jest rozłączny z B.

Uwaga 3. Powyższe przykłady mogą sugerować, że w definicji transwersalności lepiej byłoby użyć sumy prostej, a nie zwykłej sumy algebraicznej. Wolimy jednak sumę algebraiczną, bo jeśli na przykład B i A są powierzchniami w $\mathbb{R}^3$, to $A \pitchfork B$ wtedy, gdy A nie jest nigdzie styczne do B.

Uwaga 4. Zwartość na razie nie była istotna. Dopiero teraz zaczyna działać.

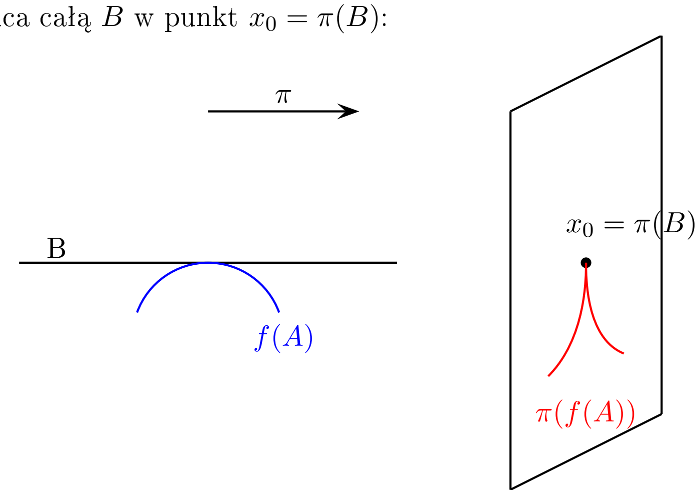
Twierdzenie 1 (Twierdzenie o transwersalności)**.** *Wybierzmy na M metrykę zgodną ze strukturą rozmaitości. Wtedy przestrzeń odwzorowań różniczkowalnych $f : A \to M$ ma strukturę przestrzeni metrycznej $C(A, M)$. Wtedy dla dowolnego B zwartego, zbiór tych f, które są transwersalne do B jest otwarty i gęsty w $C(A, M)$.*

Innymi słowy, jeśli $f \pitchfork B$, to C^1-bliskie odzworowanie g też spełnia $g \pitchfork B$. Ponadto, dla dowolnego $f : A \to M$ i dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje $g : A \to M$, $g \pitchfork B$ i g bliższe f o mniej, niż ε.

Dowód. Dowód będzie przebiegał w kilku krokach i stosował twierdzenie o funkcji uwikłanej i twierdzenie Sarda. Niech na początek $f : A \to M$ będzie dowolnym odwzorowaniem klasy C^1. Skonstruujemy odwzorowanie dowolnie bliskie f, które będzie transwersalne do B.

(a) Rozpatrujemy przypadek, gdy A jest pewnym otoczeniem zera w $\mathbb{R}^k$, B jest pewnym otoczeniem zera w $\mathbb{R}^n$ w przestrzeni $\mathbb{R}^{n+m}$ (czyli M jest otoczeniem zera w $\mathbb{R}^{n+m}$).

Niech π będzie rzutowaniem z M na przestrzeń $\mathbb{R}^m$, które przerzuca całą B w punkt $x_0 = \pi(B)$:



Wykaż, że w tym przypadku $f \pitchfork B$ wtedy i tylko wtedy, gdy x_0 *nie* jest wartością krytyczną złożenia $\pi \circ f$.

(b) Niech teraz V będzie przestrzenią dopełniającą B w M (czyli $V \oplus B = M$). Udowodnij, że dla istnieje podzbiór otwarty gęsty (zobacz

Twierdzenie 2) pełnej miary V_ε taki, że dla dowolnego $v \in V_\varepsilon$ odwzorowanie $f_v : A \to M$ zadane wzorem $f_v(a) = f(a) + v$ ma taką własność, że x_0 nie jest wartością krytyczną złożenia $\pi \circ f$.

Uwaga 5. To dodawanie parametru można obejrzeć na rysunku z pierwszej strony: niebieska krzywa jest przesunięta do góry o pewną wartość.

(c) Korzystając z argumentu sklejania wykaż, że w ogólnym przypadku da się znaleźć odwzorowanie bliskie f transwersalne do B.

Uwaga 6. Możemy pokryć zbiór A dostatecznie drobnym pokryciem. Potem modyfikujemy f na każdym zbiorze pokrycia. Problem polega na tym, że gdybyśmy byle jak modyfikowali f na każdym zbiorze pokrycia, to zmodyfikowane funkcje f_v by się nie skleiła do globalnie określonej funkcji f. I to jest treść zadania.

(d) Wykaż, że jeśli A i B są zwarte $f : A \to M$ jest transwersalne do B i g dostatecznie bliskie A wraz z pochodną, to $g \pitchfork B$.

Uwaga 7. To już bezdyskusyjnie można pokazywać w lokalnych współrzędnych tak jak w punkcie (a). Sprowadź zadanie do stwierdzenia: jeśli $f : \Omega \to \mathbb{R}^l$ oraz Ω zwarty i $y_0 \in \mathbb{R}^l$ nie jest wartością krytyczną f, to istnieje takie $\varepsilon > 0$, że jeśli $||f - g||_{C^1} < \varepsilon$, to y_0 nie jest wartością krytyczną g.

Potem udowodnij to stwierdzenie.

□

Skorzystaliśmy z wariantu twierdzenia Sarda mówiącego o tym, że zbiór wartości krytycznych jest brzegowy i domknięty. Poniżej podajemy ścisłe sformułowanie i dowód w zadaniach.

Twierdzenie 2 (Wniosek z tw. Sarda)**.** *Niech X i Y będą rozmaitościami, przy czym X jest zwarta zaś $f : X \to Y$ odpowiednio gładkim odwzorowaniem z X do Y. Wtedy zbiór wartości krytycznych jest domknięty i brzegowy.*

Dowód.
(a) Wykaż, że zbiór wartości krytycznych nie może zawierać żadnego zbioru otwartego.
(b) Wykaż, że zbiór *punktów* krytycznych f jest domknięty.
(c) Udowodnij tezę twierdzenia.
(d) Niech X i Y będą po prostu $\mathbb{R}$ (a więc nie ma zwartości dziedziny). Podaj przykład, że teza twierdzenia nie zachodzi. Co się psuje? □

Zastosowania twierdzenia o transwersalności (w wersji podanej tutaj i mocniejszej, pochodzącej od R. Thoma dość trudnej do sformułowania) są bardzo szerokie.

Z geometrycznego punktu widzenia można myśleć o tym tak

Stwierdzenie 1. *Niech M będzie rozmaitością wymiaru m zaś $B \subset M$ zwartą podrozmaitością wymiaru k. Wtedy, jeśli A jest rozmaitością wymiaru $l < m - k$, to dowolne odwzorowanie gładkie $f : A \to M$ jest homotopijne z odwzorowaniem omijającym B.*

W taki sposób można używać transwersalności jako metody liczenia np. grup homotopii rozmaitości M.

Inny przykład to wtedy, gdy wymiary się dopełniają, czyli $l+k=m$. Wtedy (udowodnij!) jeśli $f \pitchfork B$, to przecięcie $f(A) \cap B$ składa się ze skończonej liczby punktów. W topologii bardzo przydatna jest następująca definicja

Definicja 2. Niech M, A i B jak wyżej, przy czym zakładamy, że wszystkie rozmaitości są teraz *zorientowane* oraz $\dim A + \dim B = \dim M$. Niech $f : A \to M$ będzie transwersalne do B. Określamy

$$f(A) \cdot B = \sum_{y : f(A) \in B} \delta_y,$$

gdzie $\delta_y = +1$ jeśli orientacja sumy $f_* T_y A \oplus T_{f(y)} B$ zgadza się z orientacją $T_{f(y)} M$, -1 w przeciwnym przypadku. Napisaliśmy $\oplus$, aby podkreślić, że w tym przypadku przecięcie obu przestrzeni jest trywialne. Jeśli $A \subset M$ piszemy $A \cdot B$ i zakładamy, że f jest identycznością.

Zadanie 5. Wykaż, że w Przykładzie 1 indeks przecięcia niebieskiej i czarnej krzywej jest równy zero, niezależnie od wyboru orientacji.

Zadanie 6. Wykaż, że jeśli g dostatecznie bliskie f i $f \pitchfork B$, to $f(A) \cdot B = g(A) \cdot B$.

Tak naprawdę to indeks przecięcia nie zależy od klasy homotopii f. Jak mógłby wyglądać dowód? Bierzemy homotopię $F : A \times [0,1] \to M$ i $F(A,0) = f_0$, $F(A,1) = f_1$. Jeśli dałoby się zagwarantować, że dla każdego t $f_t \pitchfork B$, Zadanie 6 załatwiłoby sprawę.

Niestety, tak zrobić się nie da. Mianowicie weźmy następujący przykład:

Oczywiście f_0 i f_1 są homotopijne. Ale zawsze przejdziemy przez punkt, kiedy f_t będzie styczne do B. Gdyby tak nie było, to f_0 i f_1 przecinałyby B w takiej samej ilości punktów (dlaczego?).

Możemy jednak zagwarantować, że (przy przejściu do lokalnych współrzędnych i złożeniu z rzutowaniem π) $\pi \cdot f_t$ ma tylko niezdegenerowane wartości krytyczne oraz istnieje tylko skończenie wiele takich $t_1, \ldots, t_k$, że f_{t_i} nie jest transwersalne do B. Wynika to pośrednio z twierdzenia o transwersalności (dokładnie, z silniejszej wersji).

Przy zmianie t z $t_i - \varepsilon$ do $t_i + \varepsilon$ pojawia się (lub znika) para punktów przecięcia $f_t(A) \cap B$, z których jeden ma indeks $\delta = +1$ zaś drugi -1.

Szczegóły pomijamy.